Kofinanziert durch das
Programm Erasmus+
der Europäischen Union

Bridge2Teach

Mathematik Brückenkurs
Kapitel 0 – Einführung

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

1. Einführung

"*Eine mathematische Wahrheit ist an sich weder einfach noch kompliziert, sie ist.*"

Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840–1912)

Wir wollen Sie am Anfang einer Reise begleiten, die zur tiefen Wahrheit dieses Zitats führt. Mathematik ist in vielerlei Hinsicht eine erstaunliche, schöne Wissenschaft. Sie ist voll von einer abstrakten Ästhetik, vergleichbar mit der, die vielen modernen Kunstwerken zugrunde liegt. Sie ist die abstrakteste Kunstform, die wir kennen, und doch ist Mathematik kein Selbstzweck. Unser heutiges Leben wäre ohne Mathematik undenkbar. Raumfahrt, Autos, Schiffe, Brücken, Wolkenkratzer, Handys, Radio und Fernsehen, Internet – all das und vieles mehr hätten wir ohne Mathematik nicht. Praktische, unkomplizierte Anwendbarkeit und verflochtene Strukturen von purer Schönheit; manchmal einfache Aufgaben ausführen, manchmal sehr kreativ sein. Sich mit Mathematik zu beschäftigen kann abwechslungsreich und schweißtreibend sein; es kann zu Frustration und wunderbaren Erfolgen führen. Aber jede*r Handwerker*in und jede*r Künstler*in muss sich zunächst die Grundtechniken des Handwerks aneignen und ein Gefühl dafür bekommen, Qualität und Schönheit entwickeln, unermüdlich üben, um selbst Meisterwerke schaffen zu können.

2. Schulmathematik vs. Hochschulmathematik

„Gibt es nicht nur eine Art von Mathematik?“, könnte man fragen. Fast alle Leute und sogar die meisten Mathematiker*innen würden dem zustimmen. Dabei beschreiben die Begriffe Schulmathematik und Hochschulmathematik nicht so sehr unterschiedliche „Arten von Mathematik“, sondern unterschiedliche Sichtweisen auf Mathematik bzw. unterschiedliche Arten, Mathematik zu präsentieren und zu lernen. In der Schule wird – trotz neuer Bemühungen, sich auf Unterrichtskonzepte statt auf Rechenanweisungen zu konzentrieren – viel Zeit mit dem Lösen von Aufgaben verbracht. Und das ist auch gut so, da es den Schüler*innen ermöglicht, die zugrunde liegenden Konzepte durch „Learning by Doing“ zu verstehen. Durch die Arbeit vom Konkreten zum Abstrakten erwerben Schüler*innen in der Schule schrittweise Kenntnisse über Konzepte und Strukturen in der Mathematik. An der Universität sieht das anders aus: Die Mathematik als Wissenschaftsdisziplin beschäftigt sich meist mit abstrakten Strukturen. Diese werden durch einige grundlegende Merkmale definiert. Weitere Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Strukturen werden durch Beweise abgeleitet, wobei streng logische Schlussfolgerungen auf diese Merkmale und auf andere (bereits bewiesene) Eigenschaften angewendet werden. Aufgaben dienen meist „nur“ dazu, diese abstrakten Strukturen zu demonstrieren oder zu veranschaulichen. Man arbeitet meist vom Abstrakten zum Konkreten – genau umgekehrt wie in der Schule. Dies führt dazu, dass viele Schüler*innen (selbst diejenigen, die mit Mathematik in der Schule keine Probleme hatten) während des ersten Semesters des Mathematikstudiums stolpern (und manchmal stürzen) und das erleben, was Bildungsexperten den „Abstraktionsschock“ nennen. Noch schwerer haben es Studierende, die im Lehramtsstudium Mathematik studieren. Nicht weil sie weniger leistungsfähig sind als „reine Mathematik“-Studierende, sondern weil sie oft mit einer anderen Erwartungshaltung kommen. „Das ist ein Ausbildung für das Lehramt; warum lernen wir Mathematik nicht so, wie wir es brauchen, um Mathematik in der Schule zu unterrichten?“ ist eine Frage, die viele Universitätsmitarbeiter*innen gehört haben. Die Antwort ist nicht einfach. Es läuft auf den Konsens vieler Pädagog*innen hinaus, dass Lehrer*innen sich ein fundiertes Wissen über das Gebiet, das sie unterrichten werden, aneignen und einen umfassenden Überblick über die verschiedenen Bereiche und Methoden erhalten sollten, damit sie diesen Wissensschatz für die Gestaltung eines reichhaltigen und motivierenden Unterricht für ihre Schüler*innen in der Schule nutzen können

3. Grundbausteine

Es gibt eine Vielzahl von Listen von verschiedenen Mathematiker*innen und anderen Personen über die Grundbausteine der Mathematik. Da es sich bei diesem Material weder um eine philosophische Debatte noch um eine Vorlesung über mathematische Strukturen handelt, sondern um den Versuch, Mathematik-Lehramtsstudierenden zu Beginn ihres Studiums zu helfen, konzentrieren wir uns auf zwei Aspekte, die als Tücken bekannt sind – Sprache und Beweise.

3.1 Mathematische Sprache

Beginnen wir dieses Kapitel mit einem Witz des berühmten Physikers Herbert Pietschmann: Ein Philosoph, ein Physiker und ein Mathematiker machen Urlaub in Schottland. Sie sehen ein Schaf, das schwarz zu sein scheint.
Philosoph: *„Schottische Schafe sind schwarz!“*
Physiker: *„Oh nein, das kann man so nicht sagen. Man muss sagen: Es gibt schwarze Schafe in Schottland!“*
Mathematiker: *„Das ist alles falsch. Man muss sagen: In Schottland gibt es mindestens ein Schaf, das auf mindestens einer Seite schwarz ist!“*

Sprache ist dazu da, Informationen zu vermitteln, in der Mathematik genauso wie im täglichen Leben. Dabei ist die Sprache der Mathematik mit ihrem Fachgebiet vergleichbar – sie ist sehr strukturiert und äußerst präzise. Das klingt zwar eher nach einem Vorteil als nach einer Tücke, aber viele Menschen sind diese Art von Präzision in der Sprache nicht gewohnt. Die meisten von uns werden sich an die Antwort des Physikers im obigen Beispiel halten und für das meiste im täglichen Leben wäre das präzise genug. Für eine*n Mathematiker*in ist es jedoch wichtig, genaue Informationen mit möglichst wenig Mehrdeutigkeit zu vermitteln. Für Mathematikstudierende kann das am Anfang schwierig sein. Es empfiehlt sich also, das „Übersetzen“ symbolischer mathematischer Ausdrücke und Aussagen in ganze Sätze zu üben. Dies ist besonders wichtig für Mathematik-Lehramtsstudierende, da das eine Fähigkeit ist, die sie ihren Schüler*innen in der Schule vermitteln sollen.

Aufgaben:

Aufgabe 1: „Nazife ist 20 Jahre älter als ihre Tochter Emine.“

a) *Benutzen Sie die Variablen n für das Alter von Nazife und e für das Alter von Emine, um diese Aussage in einer mathematischen Gleichung auszudrücken!*
b) *Das Alter von Nazifes Sohn Dušan ist d; drücke in einem Satz aus, was die Gleichung $d = \frac{e}{2} + 1$ bedeutet!*

Aufgabe 2: „$h \leq k < r$“, wobei h, k und r die jeweiligen Körpergrößen von Hermann, Karim, und Roberto sind. Welche der folgenden Aussagen beschreibt bzw. beschreiben die Bedeutung dieses Ausdrucks in seiner Gesamtheit? Hinweis: Beachten Sie, dass „Hermann ist der Kleinste von den Dreien“ keine korrekte Antwort wäre, da dies zwar eine wahre Aussage ist, aber die Ungleichung nicht vollständig beschreibt.

a) *Karim ist größer als Hermann, aber kleiner als Roberto.*
b) *Karim ist nicht Kleiner als Hermann, aber kleiner als Roberto.*
c) *Roberto ist größer als Hermann und Karim.*
d) *Hermann ist kleiner oder gleich groß wie Karim, welcher kleiner als Roberto ist.*
e) *Roberto ist größer als Hermann, welcher kleiner als Karim ist.*
f) *Roberto ist größer als Karim, welcher größer als Hermann ist.*

Aufgabe 3: Verwenden Sie eine geeignete Funktion und Variablen Ihrer Wahl, um diese (wahrscheinlich sehr übertriebene) Aussage zu beschreiben: „Mein Einkommen verdoppelt sich alle zehn Jahre!“.

Wie in jeder anderen Wissenschaft gibt es auch in der Mathematik eine Vielzahl von Fachbegriffen, auch genannt mathematische Terminologie. Einige dieser Begriffe kennen die Studierenden bereits aus der Schule (z. B. viele algebraische und geometrische Notationen), andere müssen sie sich erst im Studium aneignen. Viele dieser Begriffe sind spezifisch für einen bestimmten Bereich der Mathematik und sollten in Vorlesungen zu diesem Bereich gelehrt werden (es wäre nicht sinnvoll, Studienanfänger*innen zu erklären, was Banachräume oder trilineare Koordinaten sind). Einige von ihnen kommen jedoch in fast allen Bereichen vor, und es wäre ratsam, den Studierenden eine kurze Liste dieser wiederkehrenden Begriffe zusammen mit einigen Erläuterungen zu geben.

- *Axiom*: Eine fundamentale Aussage, die als richtig akzeptiert wird und keiner weiteren Prüfung bedarf.
- *Theorem (Satz)*: Eine Aussage, die durch Anwendung logischer Schlussfolgerungen auf Axiome oder andere (bereits bewiesene) Theoreme abgeleitet wird. Abhängig von der empfundenen Wichtigkeit eines Theorems können eine Reihe anderer Wörter dafür verwendet werden:
    - *Fundamentalsatz*: Ein Satz, der für ein bestimmtes Gebiet der Mathematik als sehr wichtig angesehen wird.
    - *Proposition*: Ein Theorem, das als weniger wichtig angesehen wird.
    - *Korollar*: Ein (oft untergeordneter) Satz, der mit sehr wenig Aufwand von einem anderen (oft bedeutenden) Satz abgeleitet werden kann.
    - *Lemma*: Ein Satz, der im Beweis eines anderen (wichtigeren) Satzes verwendet wird, aber außerhalb dieses Beweises wenig Anwendung findet. Manchmal wird dafür auch der Ausdruck *Hilfssatz* verwendet.
- *Beweis/Beweisen*: Die Handlung oder das Ergebnis der Herleitung einer wahren Aussage durch Anwendung logischer Schlussfolgerungen auf Axiome oder andere bereits bewiesene Sätze.
- *Vermutung*: Eine Aussage, von der angenommen wird, dass sie wahr ist, die aber noch nicht bewiesen wurde.
- *Definition*: Eine genaue Beschreibung eines neu eingeführten Wortes, Begriffs, Ausdrucks oder Symbols, die normalerweise durch die Beschreibung der Eigenschaften oder Bedingungen des neuen Objekts erfolgt.
- *QED*: Ein Akronym für den lateinischen Ausdruck „quod erat demonstrandum“, welcher „was zu beweisen war“ bedeutet. Es wird normalerweise am Ende eines Beweises geschrieben, um genau das anzuzeigen: das Ende des Beweises (was besonders bei längeren mathematischen Texten mit vielen Beweisen nützlich ist). Auch das Symbol □ wird gelegentlich verwendet, normalerweise am Ende der letzten Zeile eines Beweises.

3.2 Beweise

Fragt man eine*n Schüler*in, warum er oder sie eine bestimmte mathematische Aussage für richtig hält, dann bekommt man meist zur Antwort „weil es im Schulbuch steht“ oder „das weiß doch jeder“. Das bedeutet, dass die Notwendigkeit, mathematische Aussagen oder Ausdrücke zu beweisen, ein Konzept ist, mit dem nicht alle Studienanfänger*innen vertraut sind. Eine gute Möglichkeit besteht darin, sich die Mathematik als ein Gebäude vorzustellen, das auf Axiomen (fundamentale Aussagen, die als richtig gelten und keiner weiteren Beweise bedürfen) als Fundament steht. Alles andere – die Wände, Decken usw. – sind Theoreme. Ein Theorem ist eine mathematische Aussage, die durch Anwendung logischer Schlussfolgerungen auf Axiome oder andere (bereits bewiesene) Theoreme abgeleitet wurde. Dieser Vorgang wird als „Beweisen“ bezeichnet, sein Ergebnis wird „Beweis“ genannt. Man kann also nur „eine neue Mauer errichten“ (ein neues Theorem hinzufügen), indem man auf die bestehende Struktur aufbaut und einen geeigneten „Mörtel“ verwendet (logische Schlussfolgerungen). Dieses Bild ist aus verschiedenen Gründen nützlich. Es zeigt zum Beispiel, dass es wichtig ist, dass alle Theoreme gründlich bewiesen sind, da sonst alle anderen darauf ruhenden „Mauern“ einstürzen könnten. Außerdem ist es sehr hilfreich, die „oberen Stockwerke“ (höhere Mathematik) zu kennen, sonst muss man jedes Mal von Grund auf neu bauen, wenn man „eine neue Mauer errichten“ will. Und schließlich, wenn man das Gebäude der Mathematik in seinem Kopf errichten (also Mathematik lernen) will, kann man nicht einfach mit dem dritten Stock anfangen und ins Leere bauen, sondern man muss damit beginnen, die Fundamente zu legen, die ersten Mauern zu bauen, und allmählich bis zum dritten Stock weitermachen. Jedenfalls beruht das „Gebäude der Mathematik“ auf Beweisen. Die Studierenden können damit beginnen, dass ihnen ganz einfache Beweise vorgelegt werden (die sie teilweise aus der Schule kennen), z. B. einige geometrische oder algebraische Theoreme, oder Theoreme aus der Zahlentheorie. Wie jedoch einer unserer berühmten Kollegen aus der Mathematikdidaktik, Hans-Christian Reichel, gerne sagte: „Mathematik ist kein Zuschauersport“. Daher ist es wichtig, dass die Studierenden schon sehr früh damit beginnen, selbst Beweise *durchzuführen*. Dies kann z. B. passieren, indem ein Satz mit seinem Beweis eingeführt wird und dann die Studierenden gebeten werden, einen ähnlichen Satz selbst zu beweisen.

Beispiel 1: „Beweise, dass wenn $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist, n^2 auch eine gerade Zahl ist!“

Beweis (vom/von der Vortragenden gezeigt):

Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist $\Rightarrow$ es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2m \Rightarrow n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\,(2m^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade.

Aufgabe für Studierende: „Beweise, dass wenn $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl ist, n^2 auch eine ungerade Zahl ist!“

Beispiel 2: „Beweise, dass wenn f eine lineare Funktion mit $f(x) = k \cdot x + d$ ist, der Differentialquotient (d. h. die Ableitung) in einem beliebigen Punkt x durch $f'(x) = k$ gegeben ist!“

Beweis (vom/von der Vortragenden gezeigt):

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{k \cdot z + d - (k \cdot x + d)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{k \cdot (z - x)}{z - x} = \lim_{z \to x} k = k$$

Aufgabe für Studierende: „Beweise, dass wenn f eine quadratische Funktion mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ist, der Differentialquotient (d. h. die Ableitung) in einem beliebigen Punkt x durch $f'(x) = 2a \cdot x + b$ gegeben ist!"

4. Das weite Meer der Mathematik

Die Idee dieses Kapitels ist es, den Studierenden einen (sehr!) kurzen Überblick über mathematische Forschungsgebiete zu geben. Dies ist an sich keine leichte Aufgabe, da verschiedene Mathematiker*innen möglicherweise unterschiedliche Antworten darauf geben, wie Forschungsgebiete in der Mathematik einzuordnen sind. Wir gehen daher von der führenden Klassifikation, der Mathematics Subject Classification (Version MSC2020), aus und gruppieren dort die Fachgebietsklassifikationen der ersten Ebene in einer häufig verwendeten Art und Weise.

- Mathematische Logik und Grundlagen
- Diskrete Mathematik und Algebra
- Analysis
- Geometrie and Topologie
- Angewandte Mathematik

Jede dieser Gruppen wird in einem Abschnitt dieses Kapitels behandelt, der die wichtigsten Forschungsgebiete der Gruppen kurz erläutert.

4.1 Mathematische Logik und Grundlagen

In dieser Gruppe sind die Grundlagen der Mathematik zu finden. Die *Mengenlehre* behandelt mathematische Mengen (die Struktur der „untersten Ebene" für die meisten Mathematiker*innen). *Algebraische Logik* formalisiert logische Schlussfolgerungen und Deduktion. Eine Metaebene darüber formalisiert die *Beweistheorie* Beweise als Objekte und nicht als Aktionen, um eine Analyse dessen zu ermöglichen, was auf syntaktischer Ebene als „gültiger Beweis" gilt; entsprechend führt die *Modelltheorie* diese Analyse auf semantischer Ebene durch. Ein neueres Gebiet in dieser Gruppe ist die *Berechenbarkeitstheorie*, die Fragen wie „Was kann berechnet werden?" und „Was bedeutet es, etwas ‚zu berechnen'?" diskutiert.

4.2 Diskrete Mathematik und Algebra

Diese Gruppe befasst sich hauptsächlich mit Strukturen in der Mathematik. Wir versuchen, in jedem der Forschungsfelder eine „typische Fragestellung" zu geben, welche die Studierenden nachvollziehen können, oder zumindest einige Strukturen zu nennen, die in diesen Feldern verwendet werden und mit denen die Studierenden vertraut sind.

Die *Kombinatorik* befasst sich mit den verschiedenen Arten des Aufzählens und Zählens („Wenn in einer Gruppe von n Personen jede davon jeder anderen die Hand schüttelt, wie viele Handschläge gibt es?"). Die *Graphentheorie*, die manchmal als Teilgebiet der Kombinatorik betrachtet wird, erforscht Beziehungen zwischen bestimmten Paaren von Objekten, die sowohl grafisch als auch als Mengen von Paaren dargestellt werden („Wie viele Farben braucht man, um jede mögliche Landkarte so anzumalen, dass zwei benachbarte Länder nicht mit der gleichen Farbe angemalt sind?"). Die *Zahlentheorie* untersucht ganze Zahlen und Funktionen mit ganzzahligen Werten. Dabei werden auch Primzahlen untersucht („Wie viele Primzahlzwillinge gibt es?").

Mehrere Teilgebiete dieser Gruppe befassen sich mit verschiedenen algebraischen Systemen: Die *Gruppentheorie* behandelt Mengen mit einer abgeschlossenen binären Operation, die die Bedingungen der Assoziativität und Invertierbarkeit erfüllt sowie ein neutrales Element bezüglicher dieser Operation besitzt (einige Gruppen sind auch kommutativ; ein typisches Beispiel wären ganze Zahlen mit der Operation „Addition“). Die *Ringtheorie* (und ihre Teilgebiete) fügt einer kommutativen Gruppe eine zweite binäre Operation (die mindestens assoziativ und – zusammen mit der ersten Operation – distributiv ist) hinzu (ein typisches Beispiel wären hier ganze Zahlen mit Addition und Multiplikation); die verschiedenen Teilfelder betrachten spezielle Ringstrukturen oder fügen der zweiten binären Operation zusätzliche Bedingungen hinzu. In der *Feldtheorie* wird die Invertierbarkeit (für jedes Element ungleich Null) zur zweiten binären Operation hinzugefügt, was die Operation der Division ermöglicht (ein typisches Beispiel sind hier die reellen Zahlen).

Ein Spezialgebiet in dieser Gruppe ist die *Lineare Algebra;* ein Gebiet, mit dem die Studierenden zu Beginn ihres Studiums intensiv konfrontiert werden. Es befasst sich mit linearen Gleichungen und deren Lösbarkeit, mit Vektoren und deren Abstraktion sowie mit Matrizen („Wie kann man folgendes lineares Gleichungssystem lösen …?“).

4.3 Analysis

Diese Gruppe befasst sich hauptsächlich mit Funktionen oder – allgemeiner – mit Formalisierungen von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten und Beschreibungen von Änderungen. Ein wesentliches Gebiet, mit dem Studierende zu Beginn ihres Studiums oft konfrontiert werden, ist die *Infinitesimalrechnung*, also das Studium *reeller Funktionen*. Dazu gehört das Studium verschiedener Eigenschaften, z. B. Kontinuität („Hat der Funktionsgraph ‚Löcher‘?“), sowie Integrale (eine Interpretation davon ist „Wie groß ist die Fläche unter dem Funktionsgraphen?“) und Ableitungen („Wie groß ist die Steigung des Funktionsgraphen? “). Die *komplexe Analysis* untersucht komplexe Funktionen in einer oder mehreren Variablen.

Die *Maßtheorie* verallgemeinert das Konzept der Integration, indem sie Teilmengen Zahlen („Maße“) zuweist. *Integralgleichungen* und *Integraltransformationen* sind weitere Bereiche, die bestimmte Aspekte der Integration untersuchen.

Mehrere Bereiche der Mathematik untersuchen Gleichungen, in denen Funktionen und ihre Ableitungen auftreten (die Lösungen solcher Gleichungen sind daher normalerweise Funktionen, keine Zahlen). *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (das Wort „gewöhnlich“ bedeutet hier keineswegs „einfach“ oder „leicht“) enthalten Funktion(en) einer unabhängigen Variablen und Ableitungen dieser Funktion(en). *Partielle Differentialgleichungen* können mehr als eine unabhängige Variable haben. Eine Vielzahl realer Probleme in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft und anderer Forschungsgebiete können durch Differentialgleichungen beschrieben werden.

Mehrere unterschiedliche Bereiche in dieser Gruppe haben eine Reihe von realen Anwendungen. *Dynamische Systeme* beschreiben die Zeitabhängigkeit eines Punktes (oft in 2D oder 3D) im Verlauf der Zeit und werden in der Biologie, Medizin, Wirtschaft etc. verwendet. *Folgen und Reihen* werden oft verwendet, um die Entwicklung dynamischer Systeme zu beschreiben. Die *harmonische Analysis* untersucht Funktionen, die als Verallgemeinerungen von Wellen beschrieben werden können und in mehreren Bereichen der Physik, Elektronik und Neurowissenschaften verwendet werden.

Eine Abstraktionsebene über jenen Funktionen, die normalerweise in der Infinitesimalrechnung betrachtet werden (das sind Funktionen, deren Objekte [meist numerische] Variablen sind), untersucht die *Funktionalanalysis* Transformationen und Funktionen, deren Objekte selbst Funktionen sind, und kombiniert dabei mehrere Bereiche der Mathematik (Infinitesimalrechnung, Lineare Algebra, Topologie und andere). Die *Operatortheorie* und die *Variationstheorie* untersuchen bestimmte Arten solcher funktionaler Transformationen.

4.4 Geometrie und Topologie

In dieser Gruppe werden verschiedene Abstraktionen des Raumes untersucht. Das Wort *Geometrie* wird heute oft als Oberbegriff für verschiedene Bereiche der Mathematik verwendet. Dazu gehört die *euklidische Geometrie* (wo sich parallele Linien nie schneiden und immer den gleichen Abstand haben, oder „wo alles so ist, wie es sein sollte", wie ein Kollege einmal bemerkte; also die herkömmlichen Begriffe und Eigenschaften von Punkten, Ebenen, Winkeln usw. in unserer Umgebung gelten) und *nicht-euklidische Geometrie* (z. B. Geometrie auf der Oberfläche einer Kugel). *Mannigfaltigkeiten* sind Verallgemeinerungen des euklidischen Raums (sie „verhalten sich lokal wie der euklidische Raum").

Die *diskrete Geometrie* untersucht kombinatorische Eigenschaften diskreter (oft endlicher) geometrischer Objekte (hier werden z. B. Parkettierungen und Kreispackungen untersucht, d. h. Fragen wie „Mit welchen geometrischen Formen kann man eine Ebene ohne Überlappungen vollständig bedecken?" und „Wie dicht kann man eine Ebene mit Kreisen bedecken?"). Die *Differentialgeometrie* wendet Methoden der Analysis an, um geometrische Objekte zu untersuchen (z. B. um die Krümmung von Oberflächen zu messen).

Die *Topologie* untersucht das Verhalten geometrischer Objekte unter (kontinuierlichen) Verformungen. Mehrere Teilgebiete, wie die *Algebraische Topologie* oder die *Differentialtopologie*, verwenden verschiedene Gebiete der Mathematik als Werkzeuge für die Arbeit mit topologischen Räumen.

4.5 Angewandte Mathematik

Selbst unter Mathematiker*innen wird diskutiert, welche Bereiche der Mathematik in diese Gruppe gehören sollten (da fast alle mathematischen Forschungsgebiete einige außermathematische Anwendungen haben) oder ob diese Gruppe überhaupt existiert. Oft sind *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Arbeiten mit zufälligen oder stochastischen Prozessen) und *Statistik* (Datenanalyse) in dieser Gruppe zu finden, ebenso wie *Numerische Mathematik* (Untersuchung numerischer Algorithmen, oft Näherungsverfahren), *Mathematische Optimierung* (das Finden einer „besten" Lösung) und *Operations Research* (Optimierung von *Entscheidungen* in komplexen Situationen), *Spieltheorie* (Modellierung strategischer Interaktionen) und Finanzmathematik.

Einige Bereiche der Angewandten Mathematik sind Anwendungen der Mathematik in anderen Bereichen, mit oft sehr unscharfen Grenzen zwischen diesen Bereichen und der Mathematik („Ist das Physik, oder ist es Mathematik?"). Darunter sind die *Quantentheorie*, *Relativitätstheorie*, *Strömungsmechanik*, *statistische Mechanik*, *künstliche Intelligenz*, *Computeralgorithmik* etc.

5. … und schlussendlich

Für diesen Brückenkurs haben wir uns mehrere Ziele gesetzt. Erstens wollen wir den Studierenden helfen, die „Lücke" zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik zu schließen. Zweitens wollen wir einen ganz kurzen Überblick geben, was es mit den verschiedenen Bereichen der Mathematik auf sich hat, damit sie dort, wo es möglich ist, eine Auswahl der Vorlesungen treffen können. Und drittens wollen wir sie gleich zu Beginn ihres Studiums an verschiedene Aspekte des Mathematikunterrichts heranführen. Um all diese Ziele mit der gleichen Sorgfalt zu erfüllen, wäre natürlich ein Brückenkurs erforderlich, der viele Tage (und Nächte) für Studierende und Vortragende füllen würde. Wir konzentrieren uns daher auf das Hauptziel, Studierende beim Schließen der Lücke zwischen Schule und Hochschule zu unterstützen, und beziehen Aspekte des zweiten und dritten Ziels mit ein. Aus diesem Grund haben wir insgesamt zehn mathematische Themen ausgewählt, gruppiert in vier Module, die sich entweder als besonders schwierig für Studierende erwiesen haben oder an der Universität ganz anders gehandhabt werden als in der Schule. Jedes der Themen enthält Ankerpunkte in der Schulmathematik, möglichst reale Anwendungen, Unterrichtstipps und Übungen. Wir hoffen, dass diese Wahl Studierende zu Beginn ihres Studiums unterstützt, erfolgreich voranzuschreiten und schließlich motivierte Mathematiklehrpersonen zu werden!