Spolufinancované z programu Európskej únie Erasmus+

Matematika – premostenie vedomostí
Časť 2a_1 – Logika

Vytvorenie tejto publikácie podporila Európska komisia. Podpora Európskej komisie neznamená schválenie obsahu publikácie. Obsah publikácie odráža iba názory autorov a Komisia nie je zodpovedná za použitie informácií v publikácií obsiahnutých.

VÝROKY, PRAVDIVOSTNÉ HODNOTY VÝROKOV

Pri pozorovaní objektov môžeme dospieť k určitým záverom, ktoré môžeme vysloviť alebo zapísať. Toto vyslovenie je buď pravdivé alebo nepravdivé a má zmysel o jeho pravdivosti hovoriť. Výrok je teda každá oznamovacia veta, o ktorej má zmysel hovoriť, či je pravdivá alebo nepravdivá. Hovoríme tiež, že ku každému výroku p je priradená jeho pravdivostná hodnota, ktorú označujeme $tv(p)$. Ak je výrok p pravdivý, pravdivostná hodnota výroku sa rovná jednej ($tv(p) = 1$). Ak je výrok nepravdivý, jeho pravdivostná hodnota sa rovná nule (zapisujeme $tv(p) = 0$). V prípade, že vytvárame tabuľku pravdivostných hodnôt výrokov, resp. vieme, že pracujeme s pravdivostnými hodnotami výrokov, slovo „tv“ („truth value“) sa môže vynechať. Požiadavka, že „výrok je buď pravdivý alebo nepravdivý“ sa nazýva veta o dvoch hodnotách a je základom klasickej dvojhodnotovej logiky. Výroky vyjadrené jednoduchou vetou sa nazývajú elementárne výroky. Písmená označujúce elementárne výroky, sa nazývajú výrokové premenné.

Operácie s výrokmi

Nech p, q sú výroky z množiny výrokov V. Potom:

a) *Alternatíva* (resp. *disjunkcia*) výrokov p, q, čítame „alebo“, označujeme $p \vee q$, je výrok, ktorý je pravdivý vo všetkých tých prípadoch, kedy aspoň jeden z výrokov p, q je pravdivý.
b) *Konjunkcia* výrokov p, q, čítame „a zároveň“, označujeme $p \wedge q$, je výrok, ktorý je pravdivý len v tom prípade, keď obidva výroky p, q sú zároveň pravdivé.
c) *Implikácia* výroku q výrokom p čítame „z toho vyplýva, resp. ak...potom...“, označujeme $p \Rightarrow q$, je výrok, ktorý je nepravdivý len v tom prípade, keď je p pravdivý výrok a zároveň je q výrok nepravdivý. Výrok p v tomto prípade nazývame predpokladom implikácie a výrok q záverom implikácie.
d) *Ekvivalencia* výrokov p, q, čítame „práve vtedy“, označujeme $p \Leftrightarrow q$, je výrok, ktorý je pravdivý, ak sú zároveň obidva výroky p, q pravdivé alebo sú zároveň obidva výroky p, q nepravdivé.
e) *Negácia* výroku p je výrok p', ktorý je pravdivý práve vtedy, keď p je nepravdivý výrok. Čítame “nie je pravda, že p“.

Výroky, ktoré vznikajú z výrokov p, q pomocou logických spojok (resp. aj tzv. funktorov), nazývame zložené výroky. Poznatky o pravdivostných hodnotách týchto zložených výrokov vyjadruje Tabuľka 1.

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Tabuľka 1: Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

Výrazy, ktoré zostavujeme pomocou funktorov $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $'$ a zátvoriek v zmysle pravidiel zostavovania výrazov, voláme *výrokové formule*. Označujeme $a(p_1, \dots, p_n)$, kde $p_1, \dots, p_n$ sú výrokové premenné (resp. len jednoducho a).

Výrok, ktorý vznikne z formuly, keď za všetky jej výrokové premenné dosadíme výroky, sa nazýva interpretácia formuly. Vezmime napr. formulu $p \wedge q \Rightarrow r$. Jej interpretácia pre prirodzené čísla môže byť napríklad: „Keď 2 delí 12 a 3 delí 12, tak aj 6 delí 12.“

Výroková formula nie je výrok, nemá pravdivostnú hodnotu. Každej výrokovej formule však vieme priradiť funkciu, ktorá vyjadruje závislosť pravdivostných hodnôt interpretácií tejto formuly od pravdivostných hodnôt výrokov dosadených za jednotlivé výrokové premenné.

Princíp vyhodnocovania výrokových formúl

Ak základné logické spojky usporiadame do postupnosti $'$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, tak každá logická spojka stojaca vľavo od uvažovanej má vyššiu prioritu pri vyhodnocovaní formuly. Tento princíp sa nazýva aj princíp priority logických spojok. V samostatne stojacich formulách sa vonkajšie zátvorky vynechávajú.

Výroková formula môže z hľadiska jej pravdivostného ohodnotenia byť:

a) *Tautológia* – je výroková formula, z ktorej po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme vždy pravdivý výrok.
b) *Kontradikcia* – je taká výroková formula, z ktorej po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme vždy nepravdivý výrok.
c) *Splniteľná výroková formula* – je výroková formula, ktorá nie je kontradikciou (má v pravdivostnej tabuľke aspoň jednu jednotku), teda aj tautológia je špeciálnym prípadom splniteľnej výrokovej formuly.

Príklad 1. Rozhodneme pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt, či formula $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$ je tautológia.

Riešenie. Vytvoríme tabuľku pravdivostných hodnôt danej formuly (Tabuľka 2) a vidíme, že pravdivostné ohodnotenie formuly $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$ je 1 pre všetky ohodnotenia výrokových premenných p, q.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabuľka 2: Pravdivostné hodnoty formuly $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$

Príklad 2. John, Mason a Sarah sú podozriví z krádeže. Pod prísahou vypovedali takto: John: „*Mason je vinný a Sarah je nevinná.*“ Mason: „*Ak je vinný John, tak je vinná aj Sarah.*“ Sarah: „*Ja som nevinná, ale najmenej jeden z ostatných je vinný.*“ Ukážeme, kto je vinný.

Riešenie. Označíme výrokovými premennými j, m, s postupne výroky „*John je vinný.*“, „*Mason je vinný.*“, „*Sarah je vinná.*“. Potom výpovede všetkých troch podozrivých vieme zapísať pomocou výrokových formúl $m \wedge s'$, $j \Rightarrow s$, $s' \wedge (j \vee m)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt teraz zistíme, či tieto formuly sú splniteľný systém (Tabuľka 3).

j	m	s	$m \wedge s'$	$j \Rightarrow s$	$s' \wedge (j \vee m)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1

1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

Tabuľka 3: Pravdivostné hodnoty formúl $m \wedge s'$, $j \Rightarrow s$, $s' \wedge (j \vee m)$

Všetky formuly vytvorené z výpovedí podozrivých sú naraz pravdivé v treťom riadku tabuľky. V tomto riadku je pravdivostne ohodnotený ako 1 iba výrok m, teda vinný je len Mason.

Príklad 3. Ukážeme, že z daných predpokladov:

a) Ivan je elektrikár.
b) Neplatí, že Ivan je elektrikár a zároveň je bohatý.
c) Ak Ivan je majiteľ prosperujúcej firmy, je bohatý.

Vyplýva záver: Ivan nie je majiteľ prosperujúcej firmy.

Riešenie. Označme postupne výroky:

x: Ivan je elektrikár.
y: Ivan je bohatý.
z: Ivan je majiteľ prosperujúcej firmy.

Potom predpoklady: „*Ivan je elektrikár.*", „*Neplatí, že Ivan je elektrikár a zároveň je bohatý.*", „*Ak Ivan je majiteľ prosperujúcej firmy, je bohatý.*" sa dajú zapísať ako: x, $(x \wedge y)'$, $z \Longrightarrow y$.

Vytvoríme tabuľku pravdivostných hodnôt predpokladov (Tabuľka 4):

x	y	z	$(x \wedge y)'$	$z \Longrightarrow y$	z'
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

Tabuľka 4: Pravdivostné hodnoty formúl x, $(x \wedge y)'$, $z \Longrightarrow y$, z'

V tabuľke (v piatom riadku) existuje také ohodnotenie premenných, že zároveň platí x, $(x \wedge y)'$, $z \Longrightarrow y$, z', teda záver je pravdivý.

Tautologické ekvivalencie

Dve formuly a, b s rovnakými premennými sa nazývajú *tautologicky ekvivalentné*, ak majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie. Tautologicky ekvivalentné formuly označujeme $a \sim b$.

Príklad 4. Ukážeme, že formuly $(p \wedge q)'$ a $p' \vee q'$ sú tautologicky ekvivalentné.

Riešenie. Vytvoríme pravdivostnú tabuľku (Tabuľka 5) obidvoch formúl. Formuly majú dve premenné p, q. Vidíme, že tabuľkou sú definované pravdivostne rovnaké funkcie, teda formuly sú tautologicky ekvivalentné.

p	q	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Tabuľka 5: Pravdivostné hodnoty formúl $(p \wedge q)'$, $p' \vee q'$

Nech a, b, c sú výrokové formuly s rovnakými premennými. Potom platia tieto tautologické ekvivalencie (Tabuľka 6):

1.	$a \vee b \sim b \vee a$	$a \wedge b \sim b \wedge a$	komutatívne zákony
2.	$(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge (b \wedge c)$	asociatívne zákony
3.	$(a \vee b) \wedge c \sim (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	$(a \wedge b) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c)$	distributívne zákony
4.	$(a \vee b)' \sim a' \wedge b'$	$(a \wedge b)' \sim a' \vee b'$	de Morganove zákony
5.	$a \vee a \sim a$	$a \wedge a \sim a$	zákony idempotentnosti
6.	$a \vee a' \sim 1$	$a \wedge a' \sim 0$	zákony komplementárnosti
7.	$(a')' \sim a$	$a \wedge (a \vee b) \sim a$	zákon involúcie
8.	$a \vee (a \wedge b) \sim a$	$a \wedge (a \vee b) \sim a$	zákony absorpcie
9.	$a \vee 0 \sim a$	$a \wedge 1 \sim a$	zákony identity
10.	$a \vee 1 \sim 1$	$a \wedge 0 \sim 0$	zákon jednotkovej alternatívy a nulovej konjunkcie
11.	$a \Rightarrow b \sim b' \Rightarrow a'$	---	zákon obmeny
12.	$a \Rightarrow b \sim a' \vee b$	$(a \Rightarrow b)' \sim a \wedge b'$	---
13.	$a \Leftrightarrow b \sim (a' \vee b) \wedge (a \vee b')$	$a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$	---

Tabuľka 6: Tautologické ekvivalencie výrokových formúl

Príklad 5. Ukážeme, že formuly $x \Leftrightarrow y$ a $(x' \wedge y)' \wedge (x' \vee y)$ sú tautologicky ekvivalentné.

Riešenie. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt určíme hodnoty formúl $x \Leftrightarrow y$, $(x' \wedge y)' \wedge (x' \vee y)$ pre všetky ohodnotenia premenných x, y (Tabuľka 7).

x	y	$x \Leftrightarrow y$	x'	$x' \wedge y$	$(x' \wedge y)'$	$x' \vee y$	$(x' \wedge y)' \wedge (x' \vee y)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1

Tabuľka 7: Pravdivostné hodnoty formúl $x \Leftrightarrow y$, $(x' \wedge y)' \wedge (x' \vee y)$

Z tabuľky vidieť, že sú dané formuly ekvivalentné. Teraz ukážeme pomocou ekvivalentných úprav, že je možné druhú formulu upraviť na prvú. Počítame $(x' \wedge y)' \wedge (x' \vee y) \sim (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \sim (y' \vee x) \wedge (x' \vee y) \sim (y \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow y) \sim x \Leftrightarrow y$.

Príklad 6. Pomocou ekvivalentných úprav ukážeme, že formuly $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$ a $(y' \Rightarrow x') \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ sú tautológie.

Riešenie. Najskôr upravíme $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$. Platí $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \sim x \Rightarrow (y' \vee x) \sim x' \vee (y' \vee x) \sim x' \vee y' \vee x \sim x' \vee x \vee y' \sim 1 \vee y' \sim 1$. Teraz upravíme $(y' \Rightarrow x') \Rightarrow (x \Rightarrow y)$. Platí $(y' \Rightarrow x') \Rightarrow (x \Rightarrow y) \sim (y \vee x') \Rightarrow (x' \vee y) \sim (y \vee x')' \vee (x' \vee y) \sim (y' \wedge x) \vee (x' \vee y) \sim \big(y' \vee (x' \vee y)\big) \wedge \big(x \vee (x' \vee y)\big) \sim (y' \vee x' \vee y) \wedge (x \vee x' \vee y) \sim (y' \vee y \vee x') \wedge (x \vee x' \vee y) \sim (1 \vee x') \wedge (1 \vee y) \sim 1 \wedge 1 \sim 1$.

Príklad 7. Zjednodušíme formulu $\big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\big) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

Riešenie. Počítame $\big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\big) \Rightarrow (x \Rightarrow z) \sim \big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\big)' \vee (x \Rightarrow z) \sim \big((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\big)' \vee (x' \vee z) \sim ((x \Rightarrow y)' \vee (y \Rightarrow z)') \vee (x' \vee z) \sim ((x' \vee y)' \vee (y' \vee z)') \vee (x' \vee z) \sim (x' \vee y)' \vee (y' \vee z)' \vee (x' \vee z) \sim (x \wedge y') \vee (y \wedge z') \vee (x' \vee z) \sim (x \wedge y') \vee \big((y \vee x' \vee z) \wedge (z' \vee x' \vee z)\big) \sim (x \wedge y') \vee \big((y \vee x' \vee z) \wedge (z' \vee z \vee x')\big) \sim (x \wedge y') \vee \big((y \vee x' \vee z) \wedge (1 \vee x')\big) \sim (x \wedge y') \vee \big((y \vee x' \vee z) \wedge 1\big) \sim (x \wedge y') \vee (y \vee x' \vee z) \sim (x \vee y \vee x' \vee z) \vee (y' \vee y \vee x' \vee z) \sim (x \vee x' \vee y \vee z) \vee (y' \vee y \vee x' \vee z) \sim (1 \vee y \vee z) \vee (1 \vee x' \vee z) \sim 1 \vee 1 \sim 1$.

Posledné dve tautologické ekvivalencie Tabuľky 6 umožňujú zapísať každú výrokovú formulu iba pomocou negácie, konjunkcie a disjunkcie.

Príklad 8. Napíšeme formuly ekvivalentné s formulou $(x \wedge y) \Rightarrow z'$ tak, aby obsahovali: a) negáciu a disjunkciu, b) negáciu a konjunkciu, c) negáciu a implikáciu.

Riešenie. Počítame a) $(x \wedge y) \Rightarrow z' \sim (x \wedge y)' \vee z' \sim x' \vee y' \vee z'$, b) $(x \wedge y) \Rightarrow z' \sim x' \vee y' \vee z' \sim (x \wedge y \wedge z)'$, c) $(x \wedge y) \Rightarrow z' \sim (x' \vee y')' \Rightarrow z' \sim (x \Rightarrow y')' \Rightarrow z'$.

Úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar výrokových formúl

Každá výroková formula sa dá vyjadriť:

a) v *normálnom disjunktívnom tvare* ako disjunkcie konjunkcií premenných, napr. $a(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$
b) ak v každom člene vystupujú všetky premenné, formula je v tzv. *úplnom normálnom disjunktívnom tvare*, napr. $a(x,y,z) = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$, kde členy formuly sa nazývajú *elementárne konjunkcie*
c) v *normálnom konjunktívnom tvare* ako konjunkcie disjunkcií premenných, napr. $a(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y' \vee z)$
d) ak v každom člene vystupujú všetky premenné, formula je v tzv. *úplnom normálnom konjunktívnom tvare*, napr. $a(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z)$, kde členy formuly sa nazývajú *elementárne disjunkcie*
e) v *minimálnom normálnom disjunktívnom tvare*, čo je normálny disjunktívny tvar, v ktorom vystupuje minimálny počet členov, ktoré obsahujú minimálny počet premenných, napr. $x \vee (y' \wedge z)$
f) v *minimálnom normálnom konjunktívnom tvare*, čo je normálny konjunktívny tvar, v ktorom vystupuje minimálny počet členov, ktoré obsahujú minimálny počet premenných, napr. $x \wedge (y \vee z')$

Príklad 9. Napíšeme v normálnom disjunktívnom tvare (nie úplnom) formulu: $r \wedge \big(p' \Rightarrow (r \vee q')\big)$.

Riešenie. Využijeme tautologickú ekvivalenciu $a \Rightarrow b \sim a' \vee b$. Platí:

$r \wedge \left(p' \Rightarrow (r \vee q')\right) \sim r \wedge \left(p \vee (r \vee q')\right) \sim (r \wedge p) \vee \left(r \wedge (r \vee q')\right) \sim (r \wedge p) \vee (r \wedge r) \vee (r \wedge q') \sim (r \wedge p) \vee r \vee (r \wedge q')$

Príklad 10. Napíšeme v normálnom konjunktívnom tvare (nie úplnom) formulu: $(p \wedge q') \Leftrightarrow r$.

Riešenie. Využijeme tautologickú ekvivalenciu $a \Leftrightarrow b \sim (a' \vee b) \wedge (a \vee b')$. Platí:

$(p \wedge q') \Leftrightarrow r \sim \left((p \wedge q')' \vee r\right) \wedge \left((p \wedge q') \vee r'\right) \sim (p' \vee q \vee r) \wedge (p \vee r') \wedge (q' \vee r')$

Príklad 11. Určíme úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar výrokovej formuly $(x \vee y) \Rightarrow z'$. Ďalej ich minimalizujeme.

Riešenie. Normálne tvary určíme pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt danej formuly $f(x, y, z)$ (Tabuľka 8).

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \Rightarrow z'$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Tabuľka 8: Tabuľka pravdivostných hodnôt formuly $(x \vee y) \Rightarrow z'$

Pomocou riadkov Tabuľky 8, kde $f(x, y, z) = 1$ určíme úplný normálny disjunktívny tvar formuly. Napíšeme príslušné elementárne konjunkcie (Tabuľka 9).

$(x \vee y) \Rightarrow z'$	elementárne konjunkcie
0	---
1	$x \wedge y \wedge z'$
0	---
1	$x \wedge y' \wedge z'$
0	---
1	$x' \wedge y \wedge z'$
1	$x' \wedge y' \wedge z$
1	$x' \wedge y' \wedge z'$

Tabuľka 9: Elementárne konjunkcie formuly $(x \vee y) \Rightarrow z'$

Potom úplný normálny disjunktívny tvar formuly je $(x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z')$. Tvar minimalizujeme ekvivalentnými úpravami. Počítame $(x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z') \sim (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \sim \left((x \wedge z') \wedge (y \vee y')\right) \vee \left((x' \wedge z') \wedge (y \vee y')\right) \vee (x' \wedge y' \wedge z) \sim (x \wedge z') \vee (x' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \sim \left(z' \wedge (x \vee x')\right) \vee (x' \wedge y' \wedge z) \sim z' \vee (x' \wedge y' \wedge z) \sim (z' \vee x') \wedge (z' \vee y') \wedge (z' \vee z) \sim (z' \vee x') \wedge (z' \vee y') \wedge 1 \sim z' \vee (x' \wedge y')$.

Teraz určíme úplný normálny konjunktívny tvar formuly pomocou riadkov Tabuľky 8, kde $f(x, y, z) = 0$. Napíšeme príslušné elementárne disjunkcie (Tabuľka 10).

$(x \vee y) \Rightarrow \bar{z}$	elementárne disjunkcie
0	$x' \vee y' \vee z'$
1	---
0	$x' \vee y \vee z'$
1	---
0	$x \vee y' \vee z'$
1	---
1	---
1	---

Tabuľka 10: Elementárne disjunkcie formuly $(x \vee y) \Rightarrow \bar{z}$

Potom úplný normálny konjunktívny tvar formuly je $(x' \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x \vee y' \vee z')$. Ekvivalentnými úpravami získame minimálny tvar. Počítame $(x' \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x \vee y' \vee z') \sim (x' \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x \vee y' \vee z') \wedge (x' \vee y' \vee z') \sim \big((y \wedge y') \vee (x' \vee z')\big) \wedge \big((x \wedge x') \vee (y' \vee z')\big) \sim \big(0 \vee (x' \vee z')\big) \wedge \big(0 \vee (y' \vee z')\big) \sim (x' \vee z') \wedge (y' \vee z')$.

Príklad 12. Určíme minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar formuly troch premenných:
a) $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba pre ohodnotenia $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$
b) $f(p, q, r)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 iba pre ohodnotenia $(1,1,1)$ a $(0,0,1)$

Riešenie. a) Všetky ohodnotenia formuly sú $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$. Potom formula f nadobúda 1 pre ohodnotenia $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$. Zostavíme tabuľku elementárnych disjunkcií a elementárnych konjunkcií (Tabuľka 11).

x	y	z	$f(x, y, z)$	elementárne konjunkcie	elementárne disjunkcie
0	0	0	1	$x' \wedge y' \wedge z'$	---
0	0	1	0	---	$x \vee y \vee z'$
0	1	0	1	$x' \wedge y \wedge z'$	---
0	1	1	1	$x' \wedge y \wedge z$	---
1	0	0	0	---	$x' \vee y \vee z$
1	0	1	0	---	$x' \vee y \vee z'$
1	1	0	0	---	$x' \vee y' \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	---

Tabuľka 11: Elementárne konjunkcie a disjunkcie formuly $f(x, y, z)$

Disjunkciou elementárnych konjunkcií dostaneme formulu $(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ v úplnom normálnom disjunktívnom tvare. Konjunkciou elementárnych disjunkcií dostaneme formulu $(x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y' \vee z)$ v úplnom normálnom konjunktívnom tvare.
Ekvivalentnými úpravami získame minimálne tvary formúl. Počítame $(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \sim (y' \wedge x' \wedge z') \vee (y \wedge x' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \sim \big((y' \vee y) \wedge (x' \wedge z')\big) \vee \big((x' \vee x) \wedge (y \wedge z)\big) \sim \big(1 \wedge (x' \wedge z')\big) \vee \big(1 \wedge (y \wedge z)\big) \sim (x' \wedge z') \vee (y \wedge z)$ a dostali sme minimálny disjunktívny tvar odpovedajúcej formuly k zadanej funkcii $f(x, y, z)$. Ďalej počítame $(x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y' \vee z) \sim (x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z) \sim \big((x \wedge x') \vee (y \vee z')\big) \wedge (y \vee x' \vee z) \wedge (y' \vee x' \vee z) \sim \big((x \wedge x') \vee (y \vee z')\big) \wedge \big((y \wedge y') \vee (x' \vee z)\big) \sim \big(0 \vee (y \vee z')\big) \wedge \big(0 \vee (x' \vee z)\big) \sim (y \vee z') \wedge (x' \vee z)$, čo už je minimálny konjunktívny tvar formuly, ktorá odpovedá danej funkcii $f(x, y, z)$.

b) Zostavíme tabuľku elementárnych disjunkcií a elementárnych konjunkcií pre formulu $f(p,q,r)$ (Tabuľka 12).

p	q	r	$f(p,q,r)$	elementárne konjunkcie	elementárne disjunkcie
0	0	0	0	---	$p \vee q \vee r$
0	0	1	1	$p' \wedge q' \wedge r$	---
0	1	0	0	---	$p \vee q' \vee r$
1	0	0	0	---	$p' \vee q \vee r$
0	1	1	0	---	$p \vee q' \vee r'$
1	0	1	0	---	$p' \vee q \vee r'$
1	1	0	0	---	$p' \vee q' \vee r$
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	---

Tabuľka 12: Elementárne konjunkcie a disjunkcie formuly $f(p,q,r)$

Disjunkciou elementárnych konjunkcií dostaneme formulu $(p' \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, ktorá sa ďalej zjednodušiť nedá, nakoľko elementárne konjunkcie neobsahujú dve rovnaké premenné. Konjunkciou elementárnych disjunkcií dostaneme formulu $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q' \vee r) \wedge (p' \vee q \vee r) \wedge (p \vee q' \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r') \wedge (p' \vee q' \vee r)$, ktorú ďalej upravíme do minimálneho tvaru. Počítame $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q' \vee r) \wedge (p' \vee q \vee r) \wedge (p \vee q' \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r') \wedge (p' \vee q' \vee r) \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge (p' \vee q \vee r) \wedge (p \vee q' \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r') \wedge (p' \vee q' \vee r) \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge \big((q \wedge q') \vee (p' \vee r)\big) \wedge (p \vee q' \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r') \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge \big((q \wedge q') \vee (p' \vee r)\big) \wedge (p \vee q' \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r') \wedge (p \vee q' \vee r) \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge \big((q \wedge q') \vee (p' \vee r)\big) \wedge \big((r \wedge r') \vee (p \vee q')\big) \wedge (p' \vee q \vee r') \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge \big((q \wedge q') \vee (p' \vee r)\big) \wedge \big((r \wedge r') \vee (p \vee q')\big) \wedge (p' \vee q \vee r') \wedge (p' \vee q \vee r) \sim \big((q \wedge q') \vee (p \vee r)\big) \wedge \big((q \wedge q') \vee (p' \vee r)\big) \wedge \big((r \wedge r') \vee (p \vee q')\big) \wedge \big((r \wedge r') \vee (p' \vee q)\big) \sim \big(0 \vee (p \vee r)\big) \wedge \big(0 \vee (p' \vee r)\big) \wedge \big(0 \vee (p \vee q')\big) \wedge \big(0 \vee (p' \vee q)\big) \sim (p \vee r) \wedge (p' \vee r) \wedge (p \vee q') \wedge (p' \vee q) \sim \big((p \wedge p') \vee r\big) \wedge (p \vee q') \wedge (p' \vee q) \sim r \wedge (p \vee q') \wedge (p' \vee q)$.

Výrokové formy

Veta, ktorá obsahuje jednu alebo viac premenných (teda nie je výrokom), z ktorej po dosadení prípustných hodnôt za premenné vznikne výrok, sa nazýva výroková forma. Označujeme $A(x_1, \dots, x_k)$, kde $x_1, \cdots, x_k$ sú premenné. Napríklad veta „*Číslo x je nepárne číslo.*“ nie je výrok. Ak za x dosadíme konkrétne celé číslo, dostaneme výrok.

Množina všetkých tých k-tic prvkov, ktoré sú prípustné pre výrokovú formu, sa nazýva *definičný obor výrokovej formy*. Množina všetkých k-tic prvkov z definičného oboru výrokovej formy, pre ktoré je výrok pravdivý, sa nazýva *obor pravdivosti výrokovej formy*. Napríklad $x^2 + y^2 \leq 0$ je výroková forma dvoch premenných x, y. Jej definičný obor je $\mathbb{R}^2$. Do oboru pravdivosti patrí len dvojica $(0,0)$, teda $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 0\} = \{(0,0)\}$.

Z výrokovej formy sa dá vytvoriť výrok aj iným spôsobom ako dosadením hodnôt za premenné. Môžeme vytvoriť výrok, v ktorom sa hovorí o počte prvkov, ktoré keď dosadíme za premenné do výrokovej formy, dostaneme pravdivý výrok. Takéto výroky nazývame kvantifikované výroky.

Nech $A(x)$ je výroková forma jednej premennej x s definičným oborom D. Potom môžeme vytvoriť takéto kvantifikované výroky:

Existuje (existuje aspoň jedno) x, že $A(x)$.
Existuje aspoň „n“ x, že $A(x)$.

Existuje najviac „n“ x, že $A(x)$.
Existuje práve „n“ x, že $A(x)$.
Pre všetky x (platí) $A(x)$.

Výrazy (slová) „existuje“ a „pre všetky“ sa nazývajú kvantifikátory. Prvý sa volá existenčný (malý) a druhý všeobecný (veľký). Existenčný kvantifikátor sa označuje symbolom $\exists$. Kvantifikovaný výrok „Existuje x, že $A(x)$.“ sa zapisuje $\exists x \in D\ A(x)$. Ak je známy obor premennej x, môže sa použiť aj zápis $\exists x\ A(x)$. Špeciálne „Existuje práve jedno x, že $A(x)$.“ Sa označuje symbolom $\exists!$. Všeobecný kvantifikátor sa označuje symbolom $\forall$. Kvantifikovaný výrok „Pre všetky x $A(x)$.“ sa zapisuje $\forall x \in D\ A(x)$. Ak je známy obor premennej x, môže sa použiť aj zápis $\forall x\ A(x)$.

Príklad 13. Rozhodneme o pravdivosti výrokov:

$$\text{a) } \exists n \in \mathbb{Z}\ n^2 = 9, \text{ b) } \forall n \in \mathbb{Z}\ n^2 = 9, \text{ c) } \exists n \in \mathbb{Z}\ n^2 = 2, \text{ d) } \forall n \in \mathbb{Z}\ n^2 = 2$$

Riešenie. a) Výrok je pravdivý, lebo napr. pre $n = -3$ je $(-3)^2 = 9$. b) Výrok je nepravdivý, lebo rovnosť $n^2 = 9$ neplatí pre každé celé číslo n, napr. pre $n = 0$ je $n^2 = 0^2 = 0 \neq 9$. c), d) Výroky sú nepravdivé, lebo len pre dve reálne čísla platí, že ich druhá mocnina je 2. Sú to čísla $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, no ani jedno z nich nie je celé číslo.

Kvantifikované výroky môžeme vytvoriť aj z výrokových foriem dvoch, troch a viac premenných. Napr. výraz $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y^2 \leq -4$ je výrok, ktorý čítame „*Existuje celé číslo x tak, že pre všetky reálne čísla y je $x + y^2 \leq -4$.*“ Výrok $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{R}\ x + y^2 - z \leq -4$ čítame „*Pre každé reálne číslo y existuje celé číslo x tak, že pre všetky reálne čísla z je $x + y^2 - z \leq -4$.*“

Zmenou poradia malého a veľkého kvantifikátora dostávame odlišné výroky, ktoré nemusia byť ekvivalentné. Poradie za sebou idúcich kvantifikátorov rovnakého typu (oba sú všeobecné alebo oba sú existenčné) môžeme meniť a výrok sa pritom nezmení. Preto aj výrazy $\forall x \in D\ \forall y \in D$ resp. $\exists x \in D\ \exists y \in D$ skracujeme na $\forall x, y \in D$ resp. $\exists x, y \in D$.

Princíp negovania kvantifikovaných výrokov je uvedený v Tabuľke 13.

Výrok	**Negácia výroku**
$\exists x \in D\ A(x)$	$\forall x \in D\ A'(x)$
Existuje aspoň k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje najviac $k - 1$ prvkov x, že $A(x)$.
Existuje najviac k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje aspoň $k + 1$ prvkov x, že $A(x)$.
Existuje práve k prvkov x, že $A(x)$.	Existuje najviac $k - 1$ alebo aspoň $k + 1$ prvkov x, že $A(x)$.
$\forall x \in D\ A(x)$	$\exists x \in D\ A(x)$

Tabuľka 13: Negácie kvantifikovaných výrokov

Negáciu výroku, ktorý obsahuje niekoľko malých a veľkých kvantifikátorov, získame tak, že každý malý kvantifikátor zmeníme na veľký, veľký kvantifikátor zmeníme na malý a výrokovú formu negujeme.

Príklad 14. Vytvoríme negácie výrokov:

$$\text{a) } \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ xy \leq y, \text{ b) } \forall x \in \mathbb{N}^+\ \exists y \in \mathbb{N}^+\ \exists z \in \mathbb{N}^+\ x^2 + y^2 = z^2$$

Riešenie. a) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ xy > y$, b) $\exists x \in \mathbb{N}^+\ \forall y \in \mathbb{N}^+\ \forall z \in \mathbb{N}^+\ x^2 + y^2 \neq z^2$

Príklad 15. Znegujeme nasledujúce výroky (ktoré sú buď pravdivé alebo nepravdivé):

a) Číslo 3 je koreňom rovnice $x^2 = 9$.
b) $2^3 - 5 > 13$.
c) Uhlopriečky štvorca sú na seba kolmé.
d) Platí $-3.5 \in \mathbb{N}$.
e) Každý z nás hovorí po čínsky.
f) Existuje aspoň jeden obdĺžnik, ktorý má kolmé uhlopriečky.
g) Tento strom má najviac 20 jabĺk.
h) Každé predstavenie má koniec.
i) Na rokovaní bolo práve 10 členov.
j) $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 - 16 = 0$.
k) $\forall n \in \mathbb{N}: n > 0$.

Riešenie.

a) Číslo 3 nie je koreňom rovnice $x^2 = 9$.
b) $2^3 - 5 \leq 13$.
c) Uhlopriečky štvorca nie sú na seba kolmé.
d) Platí $-3.5 \notin \mathbb{N}$.
e) Aspoň jeden z nás po čínsky nehovorí.
f) Všetky obdĺžniky nemajú kolmé uhlopriečky.
g) Tento strom má aspoň 21 jabĺk.
h) Existuje aspoň jedno predstavenie, ktorá nemá koniec.
i) Na rokovaní bolo najviac 9 alebo aspoň 11 členov.
j) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 - 16 \neq 0$.
k) $\exists n \in \mathbb{N}: n \leq 0$.