Cofinanziato dal programma Erasmus+ dell'Unione europea

Bridge2Teach

Corso ponte di matematica
Unità 1 – Introduzione

Il supporto della Commissione Europea per la produzione di questa pubblicazione non costituisce un avallo del contenuto che riflette solo il punto di vista degli autori, e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per qualsiasi uso che potrebbe essere fatto delle informazioni ivi contenute.

1. introduzione

" Una verità matematica non è né semplice né complicata di per sé, lo è. "

´Emile Michel Giacinto Limone (1840-1912)

Vogliamo accompagnarvi all'inizio di un viaggio che conduce alla verità profonda in questa citazione. La matematica è una scienza meravigliosa sotto molti aspetti. È ricca di un'estetica astratta, paragonabile a quella che sta alla base di molte opere d'arte moderne. È la forma d'arte più astratta che conosciamo, eppure la matematica non è fine a se stessa. La nostra vita com'è oggi sarebbe impensabile senza la matematica. Viaggi nello spazio, automobili, navi, ponti, grattacieli, telefoni cellulari, radio e televisione, Internet: tutto questo e molto altro ancora senza la matematica. Applicabilità pratica e diretta e strutture intrecciate di pura bellezza; a volte svolgendo compiti umili, a volte essendo altamente creativo. Fare matematica può essere vario e far sudare; può produrre frustrazione e meravigliosi successi. Ma ogni artigiano e ogni artista deve cominciare dall'acquisire le tecniche di base del mestiere e farne un'idea, sviluppando qualità e bellezza, esercitandosi instancabilmente per poter creare da sé capolavori.

2. Matematica scolastica vs matematica universitaria

"Non c'è un solo tipo di matematica?" si potrebbe chiedere. Quasi tutti e anche la maggior parte dei matematici sarebbero d'accordo. Eppure i termini matematica scolastica e matematica universitaria non descrivono tanto diversi "tipi di matematica", ma diversi modi di guardare alla matematica, o diversi modi di presentare e imparare la matematica. A scuola, nonostante i recenti sforzi per concentrarsi sull'insegnamento dei concetti anziché sugli algoritmi, si dedica molto tempo alla risoluzione dei compiti. E questa è una buona cosa, dal momento che consente agli studenti di comprendere i concetti sottostanti in modo apprendimento facendo. Lavorando dal concreto all'astratto, gli studenti a scuola acquisiscono una conoscenza passo dopo passo dei concetti e delle strutture in matematica. All'università le cose vanno diversamente: la matematica come disciplina scientifica si occupa principalmente di strutture astratte. Questi sono definiti da alcuni attributi di base. Ulteriori proprietà e relazioni con altre strutture sono derivate da dimostrazioni, applicando conclusioni rigorosamente logiche a questi attributi e ad altre proprietà (già provate). I compiti sono solitamente usati "solo" per dimostrare o illustrare queste strutture astratte. Di solito si lavora dall'astratto al concreto, esattamente il contrario di ciò che accade a scuola. Questo fa sì che molti studenti (anche quelli che hanno avuto vita facile con la matematica a scuola) inciampano (e talvolta cadono) durante il primo semestre di studio della matematica, sperimentando quello che gli esperti di educazione chiamano lo "shock di astrazione". Quegli studenti che studiano nel programma dell'insegnante di matematica spesso hanno un momento ancora più difficile con questo. Non perché siano meno abili degli studenti di “matematica pura”, ma perché spesso arrivano con un'aspettativa diversa. “Questo è un programma di formazione per insegnanti; perché non stiamo imparando la matematica nel modo in cui ne abbiamo bisogno, per insegnare la matematica a scuola? è una domanda che molto personale universitario ha sentito. La risposta non è facile. Si riduce al consenso tra molti educatori sul fatto che gli insegnanti dovrebbero acquisire una profonda conoscenza del campo che stanno per insegnare, ottenendo una panoramica completa delle sue varie aree e metodi, in modo che possano utilizzare questi fondi di conoscenza per creare lezioni ricche e motivanti per i loro studenti a scuola.

3. Elementi costitutivi di base

C'è una varietà di elementi costitutivi di base della matematica; dal momento che questo materiale non è né un dibattito filosofico né una lezione sulle strutture matematiche, ma un tentativo di aiutare gli studenti degli insegnanti di matematica all'inizio dei loro studi, ci concentreremo su due aspetti noti come insidie: il linguaggio e le dimostrazioni.

3.1 Linguaggio matematico

Iniziamo questo capitolo con una battuta del famoso fisico Herbert Pietschmann: Un filosofo, un fisico e un matematico sono in vacanza in Scozia. Vedono una pecora che sembra essere nera.

Filosofo: "*Le pecore scozzesi sono nere!*"

Fisico: " *Oh no, non puoi dirlo. Devi dire: ci sono pecore nere in Scozia!*

Matematico: "Hai *sbagliato tutto. Devi dire: c'è almeno una pecora in Scozia che è nera su almeno un lato!* "

La lingua è lì per trasmettere informazioni, in matematica come nella vita quotidiana. Eppure il linguaggio usato in matematica è paragonabile al suo campo: è molto strutturato ed estremamente preciso. Anche se questo suona più come un vantaggio che come una trappola, molte persone non sono abituate a questo tipo di precisione nel linguaggio. La maggior parte di noi seguirà la risposta dei fisici nell'esempio sopra, e per la maggior parte tutto nella vita quotidiana sarebbe abbastanza preciso. Per un matematico, tuttavia, è importante trasmettere informazioni esatte con il minor numero di ambiguità possibile. Per gli studenti di matematica, all'inizio può essere difficile. Quindi è consigliabile esercitarsi a "tradurre" espressioni e affermazioni matematiche simboliche in frasi complete. Questo è particolarmente importante per gli studenti insegnanti di matematica, poiché è un'abilità che dovrebbero trasmettere ai loro studenti a scuola.

Compiti:

Compito 1: " Nazife ha 20 anni in più di sua figlia Emine".

a) *Usa le variabili $n$per l'età di Nazife e $e$per l'età di Emine per esprimere questa affermazione in un'equazione matematica!*
b) *Se dè l'età di Nazifes son Du š an , esprimi in una frase cosa significa l'equazione $d = \frac{e}{2} + 1$!*

Compito 2: " $h \leq k < r$", dove h, ke $r$sono le altezze corporee di Hermann, Karim e Roberto, rispettivamente. Quale(i) delle seguenti affermazioni descrivono il significato di questa espressione nella sua interezza? Nota: tieni presente che "Hermann è il più basso dei tre" non sarebbe una risposta corretta, perché sebbene sia un'affermazione vera, non descrive la disuguaglianza nella sua interezza.

a) *Karim è più alto di Hermann ma più basso di Roberto.*
b) *Karim non è più basso di Hermann ma più basso di Roberto.*
c) *Roberto è più alto di Hermann e Karim.*
d) *Hermann è più basso o della stessa altezza di Karim, che è più basso di Roberto.*
e) *Roberto è più alto di Hermann che è più basso di Karim.*
f) *Roberto è più alto di Karim che è più alto di Hermann.*

Compito 3: Usa una funzione adatta e variabili a tua scelta per descrivere l'affermazione (probabilmente molto esagerata) "Il mio reddito raddoppia ogni dieci anni!"

Come qualsiasi altra scienza, la matematica viene fornita con una varietà di termini tecnici, chiamati anche terminologia matematica. Alcuni di questi termini gli studenti già conoscono a scuola (es. molte notazioni algebriche e geometriche), altri dovranno acquisire all'università. Molti di questi termini sono specifici di una certa area della matematica e dovrebbero essere insegnati in lezioni che riguardano quest'area (non avrebbe senso spiegare a uno studente principiante cosa sono gli Spazi di Banach o le Coordinate Trilineari). Ma alcuni di loro compaiono in quasi tutte le aree, e sarebbe prudente fornire agli studenti un breve elenco di questi termini ricorrenti, insieme ad alcune spiegazioni.

- *Assioma*: un'affermazione fondamentale che è accettata come corretta e non necessita di ulteriori prove.
- *Teorema*: un'affermazione derivata applicando conclusioni logiche ad assiomi o altri teoremi (già provati). A seconda dell'importanza percepita di un teorema, è possibile utilizzare una serie di altre parole:
    - *Teorema fondamentale*: un teorema che è considerato molto importante per un'area specifica della matematica.
    - *Proposizione:* Un teorema considerato di minore importanza.
    - *Corollario:* Un teorema (spesso minore) che può essere dedotto da un altro (spesso maggiore) teorema con pochissimo sforzo.
    - *Lemma:* Un teorema che viene utilizzato nella dimostrazione di un altro (più importante) teorema, ma ha poca applicazione al di fuori di questa dimostrazione. A volte per questo vengono utilizzate anche le espressioni *teorema ausiliario* o teorema *accessorio .*
- *Dimostrazione/dimostrazione:* l'atto o il risultato di derivare un'affermazione vera applicando conclusioni logiche ad assiomi o altri teoremi già provati.
- *Congettura:* un'affermazione che si crede essere vera ma non è stata ancora provata.
- *Definizione:* una descrizione esatta di una parola, un termine, un'espressione o un simbolo appena introdotti, solitamente eseguita descrivendo le proprietà o le condizioni del nuovo oggetto.
- *QED:* Acronimo dell'espressione latina "quod erat demonstrandum", che significa "ciò che doveva essere mostrato [o dimostrato]". Di solito è scritto alla fine di una dimostrazione per significare esattamente questo: la fine della dimostrazione (che è particolarmente utile per testi matematici più lunghi con molte dimostrazioni). Occasionalmente viene utilizzato anche il simbolo □ , di solito alla fine dell'ultima riga di una dimostrazione.

3.2 Dimostrazioni

Se chiedi a uno studente di scuola perché pensa che una certa affermazione matematica sia corretta, la risposta è molto probabilmente "perché l'ha detto l'insegnante", "perché è scritto nel libro di testo" o "lo sanno tutti". Ciò significa che la necessità di dimostrare affermazioni o espressioni matematiche è un concetto con cui non tutti gli studenti principianti hanno familiarità. Un buon modo è che gli studenti immaginino la matematica come un edificio basato su assiomi (affermazioni di base che sono concordate per essere corrette e non necessitano di ulteriori prove) come base. Tutto il resto – le pareti, i soffitti, ecc. – sono teoremi. Un teorema è un'affermazione matematica che è stata derivata applicando conclusioni logiche ad assiomi o altri teoremi (già provati). Questo processo è chiamato "prova", il suo risultato è chiamato "prova". Quindi si può solo “erigere un nuovo muro” (aggiungere un nuovo teorema) solo costruendo sulla struttura esistente e utilizzando una “malta” adeguata (conclusioni logiche). Questa immagine è utile per una serie di motivi. Mostra ad esempio che è importante che tutti i teoremi siano completamente dimostrati, altrimenti tutti gli altri “muri” che vi poggiano potrebbero crollare. Inoltre, è molto utile conoscere i "piani superiori" (matematica superiore), altrimenti si deve iniziare a costruire da terra ogni volta che si vuole "erigere un nuovo muro". E infine, se si vuole erigere nella propria mente l'edificio della matematica (cioè imparare la matematica), non si può partire dal terzo piano e costruire dal nulla, ma bisogna cominciare col gettare le fondamenta, costruire i primi muri, e gradualmente procedi al terzo piano. In ogni caso, la “costruzione della matematica” si basa sulle dimostrazioni. Gli studenti possono iniziare con la presentazione di dimostrazioni molto semplici (alcune delle quali potrebbero conoscerle a scuola), ad esempio di alcuni teoremi geometrici o algebrici, o teoremi della teoria dei numeri. Tuttavia, come amava dire uno dei nostri famosi colleghi di insegnamento della matematica, Hans-Christian Reichel , "La matematica non è uno sport per spettatori!" È quindi importante che gli studenti inizino a *fare le* prove da soli molto presto. Questo può essere fatto ad esempio introducendo un teorema con la sua dimostrazione, e poi chiedere agli studenti di dimostrare da soli un teorema simile.

Esempio 1: "*Dimostrazione che se* $n \in \mathbb{N}$*è un numero pari,* n^2*è anche un numero pari!*"

Dimostrazione (dimostrata dal docente):

Se $n \in \mathbb{N}$c'è anche ⇒ c'è un $m \in \mathbb{N}$tale che$n = 2m \Rightarrow n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\,(2m^2) \Rightarrow$

⇒ n^2è anche.

Compito per gli studenti: " Dimostra che se $n \in \mathbb{N}$è un numero dispari, n^2è anche un numero dispari!"

Esempio 2: "Dimostrazione che se f*è una funzione lineare con* $f(x) = k \cdot x + d$*, allora il quoziente differenziale (cioè la derivata) in un punto arbitrario* x*è dato da* $f'(x) = k$*!"*

Dimostrazione (dimostrata dal docente):

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{k \cdot z + d - (k \cdot x + d)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{k \cdot (z - x)}{z - x} = \lim_{z \to x} k = k$$

Compito per gli studenti: “Dimostrare che se fè una funzione quadratica con $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, allora il quoziente differenziale (cioè la derivata) in un punto arbitrario xè dato da $f'(x) = 2a \cdot x + b$!”

4. La vastità della matematica

L'idea di questo capitolo è di offrire agli studenti una (molto!) breve panoramica delle aree di ricerca matematica. Questo di per sé non è un compito facile, dal momento che diversi matematici possono dare risposte diverse su come classificare le aree di ricerca in matematica. Andremo quindi con la classificazione principale, chiamata Mathematics Subject Classification (versione MSC2020), e raggrupperemo lì le classificazioni dell'area di ricerca di primo livello in un modo frequentemente utilizzato.

- Logica matematica e fondamenti
- Matematica discreta e algebra
- Analisi
- Geometria e topologia
- Matematica applicata

Ciascuno di questi gruppi sarà trattato in una sezione di questo capitolo che spiega brevemente le aree di ricerca più importanti dei gruppi.

4.1 Logica matematica e fondamenti

In questo campo si trovano le basi della matematica. *La Teoria* degli insiemi discute gli insiemi matematici (la struttura di "livello più basso" per la maggior parte dei matematici). *La logica algebrica* sta formalizzando conclusioni e deduzioni logiche. Un meta-livello sopra, *Proof Theory* formalizza le prove come oggetti piuttosto che come azioni per consentire un'analisi di ciò che conta come una "dimostrazione valida" a livello sintattico; di conseguenza, *Model Theory* fa questa analisi a livello semantico. Un campo più recente in questo gruppo è *la teoria della computabilità* , che discute domande come "cosa può essere calcolato?" e "cosa significa 'calcolare' qualcosa?"

4.2 Matematica discreta e algebra

Questo campo si occupa principalmente di strutture in matematica. Cerchiamo di porre una "domanda tipica" in ciascuno dei campi di ricerca a cui gli studenti possono relazionarsi, o almeno di nominare alcune strutture che vengono utilizzate in questi campi e che gli studenti hanno familiarità.

La combinatoria esamina i vari modi di enumerare e contare ("se in un gruppo di n persone tutti si stringono la mano a tutti gli altri, quante strette di mano si verificano?"). *La teoria dei grafi* , a volte considerata una sottoarea della Combinatoria, ricerca le relazioni tra certe coppie di oggetti che sono rappresentate sia graficamente che come insiemi di coppie ("quanti colori servono per colorare una mappa immaginabile, in modo tale che due paesi vicini non siano colorato con lo stesso colore?”). *La teoria dei* numeri studia i numeri interi e le funzioni con valori interi. Come parte di ciò, vengono studiati anche i numeri primi ("quanti primi gemelli ci sono?").

Diversi sottocampi di questo gruppo trattano vari sistemi algebrici: *Teoria dei* gruppi discute insiemi con un'operazione binaria chiusa che soddisfa le condizioni di associatività, identità e invertibilità (alcuni gruppi sono anche commutativi; un tipico esempio sarebbero gli interi con l'operazione "addizione"). *La teoria dell'anello* (ei suoi sottocampi) aggiunge una seconda operazione binaria (che è almeno associativa e – insieme alla prima operazione – distributiva) a un gruppo commutativo (un tipico esempio qui sarebbe Interi con addizione e moltiplicazione); i vari sottocampi esaminano strutture ad anello speciali o aggiungono condizioni aggiuntive alla seconda operazione binaria. In *teoria dei campi* l' invertibilità (per ogni elemento diverso da zero) viene aggiunta alla seconda operazione binaria, consentendo l'operazione di divisione (un tipico esempio qui sono i numeri Reali).

Un campo speciale in questo gruppo è l' *algebra lineare* , un campo con il quale gli studenti saranno ampiamente confrontati all'inizio dei loro studi. Si tratta di equazioni lineari e della loro risolubilità, di vettori e loro astrazione, e di matrici (“come si può risolvere il seguente sistema di equazioni lineari…?”).

4.3 Analisi

Questo campo si occupa principalmente di funzioni, o – più in generale – di formalizzazione delle relazioni tra oggetti matematici e descrizioni del cambiamento. Un campo importante con cui gli studenti devono spesso confrontarsi all'inizio dei loro studi è il *Calcolo (Reale)* , cioè lo studio delle *Funzioni Reali* Questo include lo studio di varie proprietà, ad esempio la continuità ("il grafico della funzione 'ha buchi'?") , così come integrali (un'interpretazione dei quali è "qual è l'area sotto il grafico della funzione?") e derivati ("qual è la pendenza del grafico della funzione?"). *L'analisi complessa* (a volte chiamata anche calcolo complesso) studia le funzioni complesse in una o più variabili.

La Teoria della Misura generalizza il concetto di integrazione assegnando numeri ("misure") a sottoinsiemi. Le *equazioni integrali* e le *trasformazioni integrali* sono ulteriori campi che studiano alcuni aspetti dell'integrazione.

Diversi campi della matematica studiano le equazioni in cui compaiono funzioni e loro derivate (le soluzioni di tali equazioni sono quindi solitamente funzioni, non numeri). *Le equazioni differenziali ordinarie* (la parola "ordinario" non significa in alcun modo "semplice" o "facile" qui) contengono funzioni di una variabile indipendente e derivate di questa/queste funzioni. *Le equazioni differenziali parziali* possono avere più di una variabile indipendente. Una grande varietà di problemi della vita reale in vari campi della scienza e in altre aree di ricerca può essere descritta da equazioni differenziali.

Diverse aree diverse in questo gruppo hanno una serie di applicazioni nella vita reale. I *sistemi dinamici* descrivono la dipendenza dal tempo di un punto (spesso in 2D o 3D) nel tempo e sono usati in biologia, medicina, economia ecc. *Le sequenze e le serie* sono spesso usate per descrivere lo sviluppo dei sistemi dinamici. *L'analisi armonica* studia le funzioni che possono essere descritte come generalizzazioni delle onde e sono utilizzate in diverse aree della fisica, dell'elettronica e delle neuroscienze.

Un livello di astrazione al di sopra di quelle funzioni che vengono solitamente osservate in Calcolo (che sono funzioni i cui oggetti sono [per lo più variabili numeriche]), l' *Analisi Funzionale* studia le trasformazioni e le funzioni i cui oggetti sono funzioni stesse, combinando così diverse aree della matematica (Calcolo, Algebra lineare , Topologia e altri). *La teoria dell'operatore* e la teoria della *variazione* esaminano alcune varietà di tali trasformazioni funzionali.

4.4 Geometria e Topologia

In questo campo vengono studiate varie astrazioni dello spazio. La parola *geometria* è spesso usata oggi come termine sovraordinato per vari campi della matematica. Include la *geometria euclidea* (dove le rette parallele non si intersecano mai e hanno sempre la stessa distanza, o "dove tutto è come dovrebbe essere", come ha notato una volta un collega; cioè le nozioni convenzionali e le proprietà di punti, piani, angoli ecc. nel nostro ambiente applicabile) e *Geometria non euclidea* (es. geometria sulla superficie di una sfera). *Molteplici* sono generalizzazioni dello spazio euclideo (si "comportano localmente come lo spazio euclideo").

La Geometria Discreta studia le proprietà combinatorie di oggetti geometrici discreti (spesso finiti) (qui vengono studiati ad esempio le tassellazioni e gli impaccamenti di cerchi, ad esempio domande come "con quali forme geometriche si può coprire completamente una pianura senza sovrapporsi?"

e "quanto denso si può coprire un semplice con cerchi?"). *La geometria differenziale* applica metodi di calcolo per studiare oggetti geometrici (ad esempio per misurare la curvatura delle superfici).

La topologia studia il comportamento di oggetti geometrici sotto deformazioni (continue). Diversi sottocampi, come la *topologia algebrica* o la *topologia differenziale* , utilizzano diversi campi della matematica come strumenti per lavorare con gli spazi topologici.

4.5 Matematica Applicata

Anche tra i matematici si discute su quali campi della matematica dovrebbero rientrare in questo gruppo (dal momento che quasi tutte le aree di ricerca matematica hanno alcune applicazioni extra-matematiche), o anche se questo gruppo esiste effettivamente. Spesso in questo gruppo si trovano la *teoria della probabilità* (lavorare con processi casuali o stocastici) e la *statistica (analisi dei dati), così come l' analisi numerica* (studio di algoritmi numerici, spesso approssimazioni), l' *ottimizzazione matematica (trovare una* soluzione "migliore") e *la ricerca operativa* (ottimizzazione delle decisioni in situazioni complesse), *teoria dei giochi* (modellazione di interazioni strategiche) e *matematica finanziaria* .

Diverse aree della matematica applicata sono applicazioni della matematica in altri campi, con limiti spesso molto diffusi tra questi campi e la matematica ("è fisica o matematica?"). Tra questi ci sono *la Teoria Quantistica* , la *Relatività* , la Meccanica dei *Fluidi, la Meccanica* Statistica *,* l' *Intelligenza Artificiale* , l' *Algoritmica del Computer* ecc.

5. … e infine

Per questo corso ponte, abbiamo diversi obiettivi. In primo luogo, vogliamo aiutare gli studenti a “colmare il divario” tra matematica scolastica e matematica universitaria. In secondo luogo, vogliamo fornire una panoramica molto breve di cosa trattano i vari campi della matematica, in modo che possano fare una scelta di lezioni laddove ciò sia possibile. E terzo, vogliamo introdurli ai vari aspetti dell'insegnamento della matematica proprio all'inizio dei loro studi. Per raggiungere tutti questi obiettivi con uguale rigore richiederebbe ovviamente un corso ponte che riempirebbe molti giorni (e notti) sia per gli studenti che per i docenti. Ci concentriamo quindi sull'obiettivo principale di supportare gli studenti a colmare il divario tra scuola e università, includendovi aspetti del secondo e del terzo obiettivo. Per questo motivo abbiamo scelto un totale di dieci argomenti matematici, raggruppati in quattro moduli, che si sono rivelati particolarmente difficili per gli studenti, oppure sono trattati in modo molto diverso all'università come a scuola. Ciascuno degli argomenti includerà punti di ancoraggio nella matematica scolastica, applicazioni nella vita reale, se possibile, suggerimenti per l'insegnamento ed esercizi. Ci auguriamo che questa scelta supporti gli studenti all'inizio dei loro studi, consentendo loro di progredire con successo e, infine, diventare insegnanti di matematica motivati!