Spolufinancované z programu Európskej únie Erasmus+

Matematika – premostenie vedomostí Časť 2a_2 – Množiny

Vytvorenie tejto publikácie podporila Európska komisia. Podpora Európskej komisie neznamená schválenie obsahu publikácie. Obsah publikácie odráža iba názory autorov a Komisia nie je zodpovedná za použitie informácií v publikácií obsiahnutých.

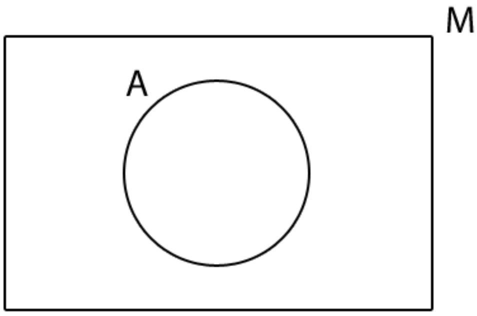
Množiny a Vennove diagramy

Množina patrí medzi najpoužívanejšie pojmy v súčasnej matematike. Základy teórie množín v podobe, v akej sa dodnes v neaxiomatizovanej forme traduje, založil a vybudoval v r. 1873 - 1884 nemecký matematik Georg Cantor (1845 - 1918). Napriek počiatočnej kritike odporcami Cantora sa jeho teória stala začiatkom 20. storočia uznávanou vetvou matematiky.

Ak je nejaký objekt m prvkom množiny M, píšeme $m \in M$. Ak objekt m nie je prvkom množiny M, zapisujeme $m \notin M$. Hovoríme, že množina M je určená, ak o každom objekte vieme jednoznačne rozhodnúť, či je prvkom množiny M alebo nie. Prázdnou množinou nazývame množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok. Označujeme ju symbolom $\emptyset$. Množinu A nazývame podmnožinou množiny B práve vtedy, keď platí, že každý prvok množiny A je zároveň prvkom množiny B. Zapisujeme $A \subset B$. Hovoríme, že množiny A, B sa rovnajú práve vtedy, keď zároveň platí $A \subset B$, $B \subset A$. Zapisujeme $A = B$. Ak súčasne neplatí $A \subset B$, $B \subset A$, množiny A, B sú rôzne. Zapisujeme $A \neq B$.

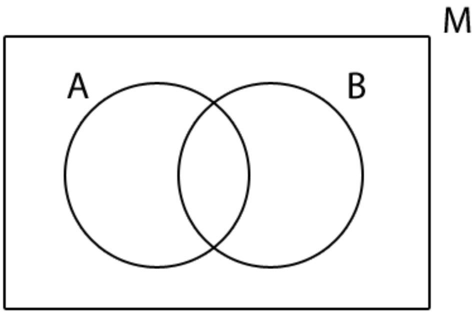
Vzťahy medzi množinami sa dajú graficky vyjadrovať pomocou tzv. Vennovho diagramu, vymysleného britským filozofom Johnom Vennom (1834 - 1923). Tento diagram pre vizuálne znázornenie množín, ich prvkov a vzájomných logických vzťahov vymyslel v r. 1880 a pozostáva z kruhových alebo eliptických plôch, ktoré znázorňujú skupinu objektov s určitou spoločnou vlastnosťou. Podobné znázornenia sa v logike používali už pred Vennom napr. u matematikov Gottfrieda Leibniza alebo Leonharda Eulera. Venn bol ale prvý, ktorý ich systematicky preštudoval a ich používanie zovšeobecnil. V praxi sa Vennove diagramy používajú najviac pre päť množín. V r. 2001 zostavil matematik Peter Hamburger a výtvarníčka Edit Heppová diagram až pre 11 množín. Vennove diagramy názorne ilustrujú rôzne množinové situácie a sú vhodným prostriedkom pre riešenie množinových úloh.

Uvažujme teraz nejakú ľubovoľnú neprázdnu množinu M a jej podmnožiny A, B, C, D. Skutočnosť, že množina A je podmnožinou množiny M sa dá graficky znázorniť takto (Obrázok 1):



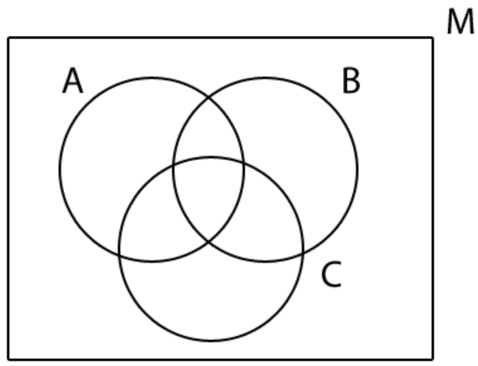
Obrázok 1: $A \subset M$

Skutočnosť, že dve množiny A, B sú podmnožinami množiny M, by sa vyjadrila takto (Obrázok 2):



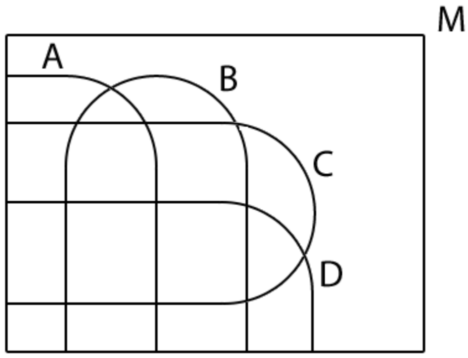
Obrázok 2: $A \subset M, B \subset M$

Vennov diagram pre tri podmnožiny A, B, C by vyzeral takto (Obrázok 3):



Obrázok 3: $A \subset M, B \subset M, C \subset M$

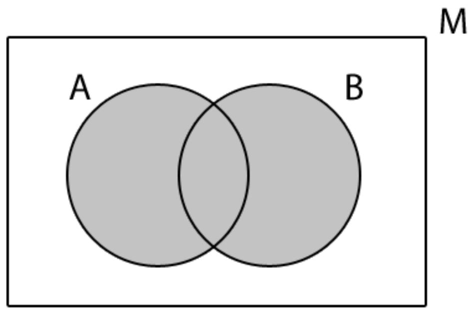
Vennov diagram pre štyri podmnožiny A, B, C, D by vyzeral takto (Obrázok 4):



Obrázok 4: $A \subset M, B \subset M, C \subset M, D \subset M$

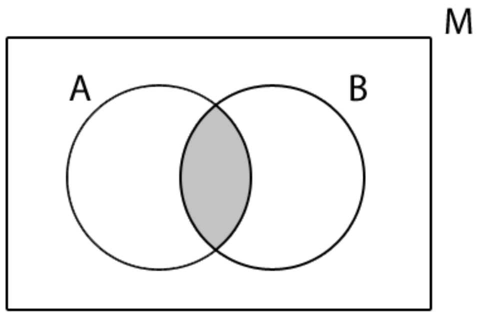
Obdĺžnik, ktorý je obrazom množiny M, rozdelený podmnožinami na oblasti, sa nazýva pole Vennovho diagramu. Pritom pole počítame tiež medzi oblasti.

Ku každým dvom množinám A, B existuje jednoznačne určená množina, ktorú nazývame zjednotenie množín A, B (Obrázok 5) a označujeme $A \cup B$. Je to množina všetkých tých prvkov množiny M, ktoré patria množine A alebo patria množine B. „Alebo“ sa chápe v zmysle nevylučovacom, teda do zjednotenia množín $A \cup B$ patria aj prvky, ktoré sú zároveň z množiny A a B).



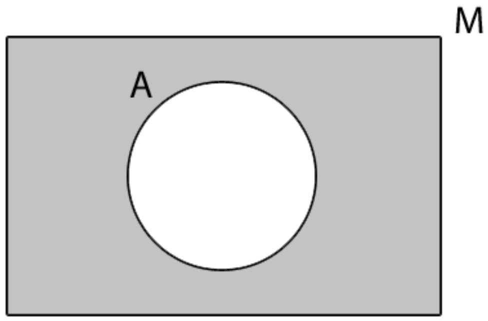
Obrázok 5: $A \cup B$

Ku každým dvom množinám A, B existuje jednoznačne určená množina, ktorú nazývame prienik množín A, B a označujeme $A \cap B$. Je to množina všetkých tých prvkov množiny M, ktoré zároveň patria množine A a množine B.



Obrázok 6: $A \cap B$

Ku každej množine A existuje jednoznačne určená množina A', ktorá sa nazýva doplnok množiny A vzhľadom k množine M. Je to množina všetkých tých prvkov množiny M, ktoré nepatria množine A, teda také, pre ktoré platí $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = M$.



Obrázok 7: A'

Pre všetky podmnožiny A, B, C množiny M platí $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Z toho vyplýva, že pri tvorení zjednotenia a prieniku troch množín nezáleží na uzátvorkovaní. Platí teda $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$, podobne $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Príklad 1. Nech P_1 je množina všetkých reálnych koreňov rovnice $x^2 + 5x + 6 = 0$, P_2 je množina všetkých reálnych koreňov rovnice $x^2 + 4x + 3 = 0$. Určíme $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, P_1'.

Riešenie. Podľa definície prieniku množín je $x \in P_1 \cap P_2$ práve vtedy, keď $x \in P_1$ a zároveň $x \in P_2$, teda práve vtedy, keď zároveň platí $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 + 4x + 3 = 0$. Množina $P_1 \cap P_2$ sa teda rovná množine všetkých reálnych koreňov sústavy rovníc:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

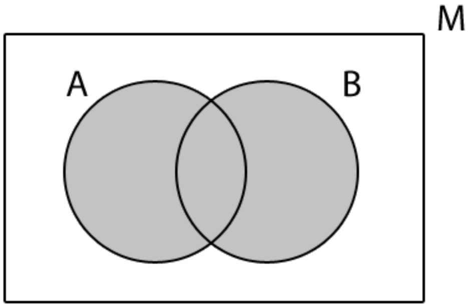
Túto vyriešime a zistíme, že ide o jednoprvkovú množinu $\{-3\}$, teda $P_1 \cap P_2 = \{-3\}$. Množina $P_1 \cup P_2$ sa rovná množine všetkých reálnych koreňov rovnice:

$$(x^2 + 5x + 6) \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0$$

Teda ide o množinu $P_1 \cup P_2 = \{-1, -2, -3\}$. A množina P_1' je množina všetkých reálnych čísel x, pre ktoré platí $x^2 + 5x + 6 \neq 0$.

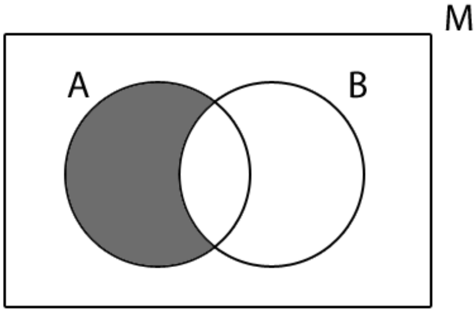
Príklad 2. Zjednodušíme zápis množiny $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$ tak, aby obsahoval čo najmenej symbolov.

Riešenie. Pomocou Vennovho diagramu pre množiny A, B. Najskôr vyznačíme oblasť, ktorá je obrazom množiny $(A \cup B)$ (Obrázok 8).



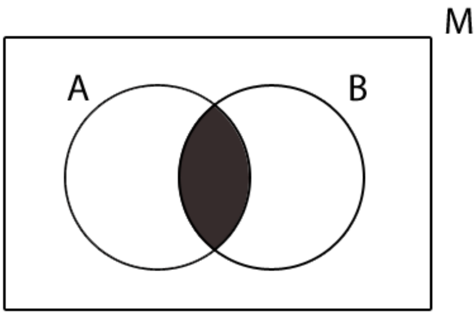
Obrázok 8: $A \cup B$

Ďalej vyznačíme oblasť znázorňujúcu $(A \cap B')$ (Obrázok 9).



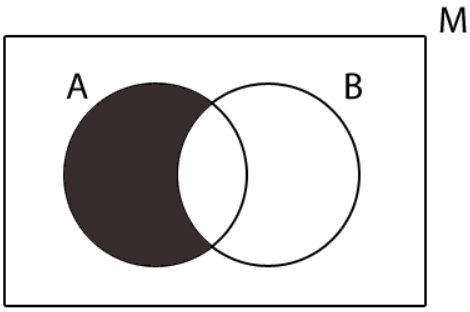
Obrázok 9: $(A \cap B')$

A ešte obraz množiny $A \cap B$ (Obrázok 10).



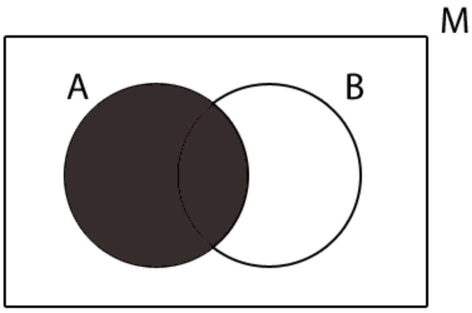
Obrázok 10: $A \cap B$

Teraz vytvoríme obraz množiny $[(A \cup B) \cap (A \cap B')]$, ktorý sa skladá zo všetkých tých oblastí Vennovho diagramu, ktoré sú zároveň vyznačené na Obrázku 8 a Obrázku 9 (Obrázok 11).



Obrázok 11: $[(A \cup B) \cap (A \cap B')]$

Potom obrazom uvažovanej množiny $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$ je oblasť, ktorá sa skladá zo všetkých tých oblastí Vennovho diagramu, ktoré sú vyznačené na Obrázku 11 alebo zo všetkých oblastí vyznačených na Obrázku 10. Vidíme, že skúmaná množina je množina celá množina A, teda platí $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B) = A$ (Obrázok 12).



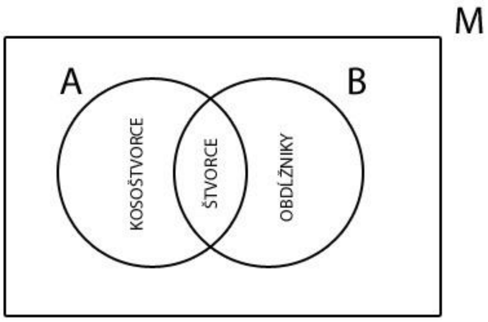
Obrázok 12: $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B) = A$

Príklad 3. Uvažujme množinu M všetkých štvoruholníkov v rovine. Písmenom A označíme množinu všetkých rovnostranných štvoruholníkov, písmenom B množinu všetkých štvoruholníkov, ktoré majú všetky vnútorné uhly pravé. Rozhodneme, či platí:

a) $A \cap B$ je množina všetkých štvorcov
b) $A \cup B$ je množina všetkých štvoruholníkov, ktoré majú aspoň dve osi súmernosti
c) B' je množina všetkých štvoruholníkov, ktoré majú aspoň jeden vnútorný uhol ostrý alebo tupý

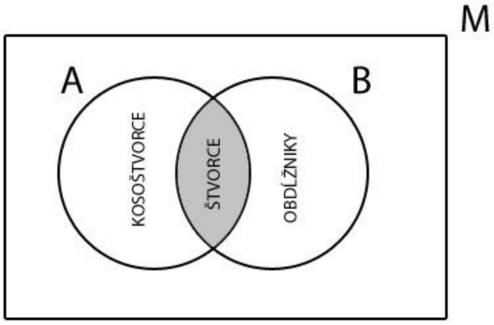
Ďalej určíme množiny d) $A \cap B'$ a e) $A' \cup B'$.

Riešenie. Keďže množina M je množina všetkých štvoruholníkov v rovine, platí $M = \{štvorce, kosoštvorce, obdĺžniky, kosodlžníky, deltoidy, nepravidelné\ štvoruholníky, \cdots\}$. Ďalej A je množina všetkých rovnostranných štvoruholníkov, teda $A = \{štvorce, kosoštvorce\}$, $B = \{štvorce, obdĺžniky\}$. Ďalej B je množina všetkých štvoruholníkov, ktoré majú všetky vnútorné uhly pravé. Zostrojíme Vennov diagram pre množiny A, B, M (Obrázok 13).



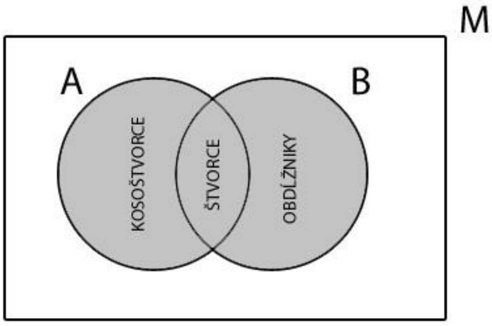
Obrázok 13: Vennov diagram pre množiny A, B, M

a) Na Obrázku 14 je vyznačená množina $A \cap B$, a platí teda $A \cap B$ je množina všetkých štvorcov.



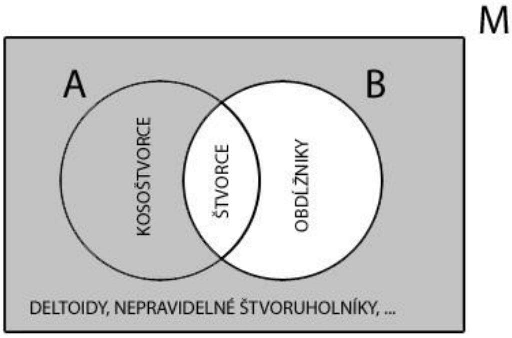
Obrázok 14: $A \cap B$

b) Na Obrázku 15 je vyznačená množina $A \cup B$, teda je pravda, že $A \cup B$ je množina všetkých štvoruholníkov, ktoré majú aspoň dve osi súmernosti.



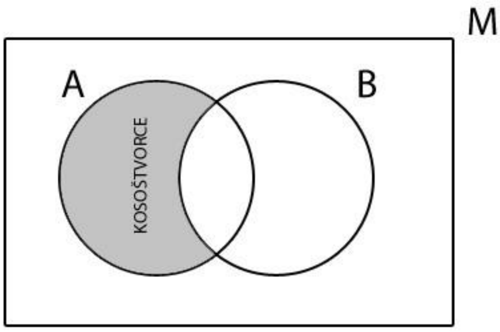
Obrázok 15: $A \cup B$

c) Na Obrázku 16 je vyznačená množina B' a platí B' je množina všetkých štvoruholníkov, ktoré majú aspoň jeden vnútorný uhol ostrý alebo tupý.



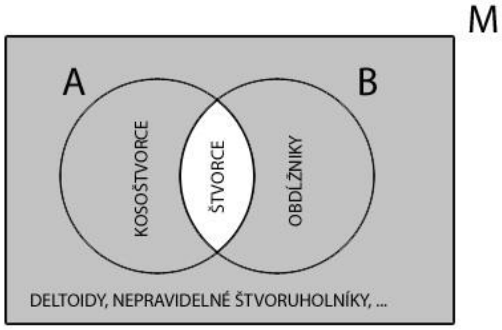
Obrázok 16: B'

d) Na Obrázku 17 je vyznačená oblasť množiny $A \cap B'$. Teda ide o množinu všetkých rovnostranných štvoruholníkov, ktorých aspoň jeden vnútorný uhol je ostrý alebo tupý (množinu všetkých kosoštvorcov).



Obrázok 17: $A \cap B'$

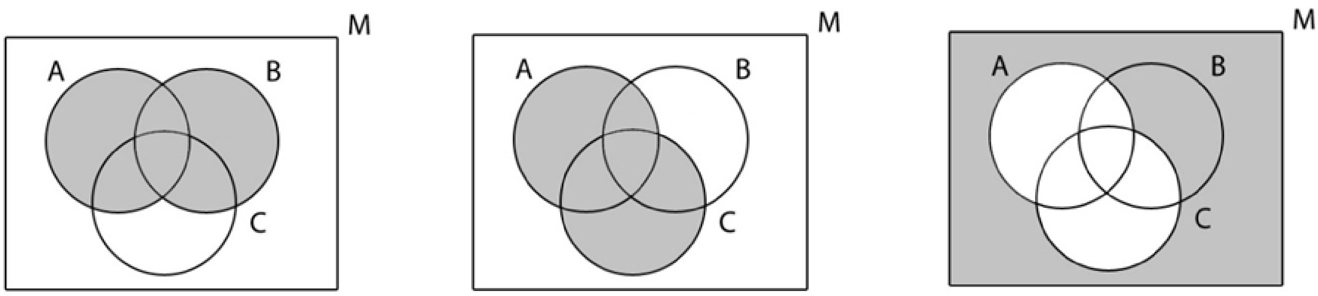
e) Na Obrázku 18 sú vyznačené oblasti množiny $A' \cup B'$, ktoré reprezentujú množinu všetkých štvoruholníkov, ktoré nie sú rovnostranné, alebo majú aspoň jeden vnútorný uhol ostrý alebo tupý (teda ide o množinu všetkých štvoruholníkov, ktoré nie sú štvorce).



Obrázok 18: $A' \cup B'$

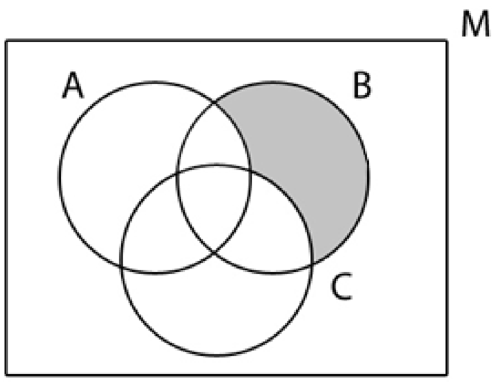
Príklad 4. Nech A, B, C sú podmnožiny množiny M. Určíme nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby platilo $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C') = (C' \cap B) \cup A$.

Riešenie. Budeme postupne zobrazovať jednotlivé množiny pomocou Vennovych diagramov. Najskôr vytvoríme obrazy $(A \cup B)$ a $(C \cup A)$ a doplnok $(C \cup A)'$ (Obrázok 19).



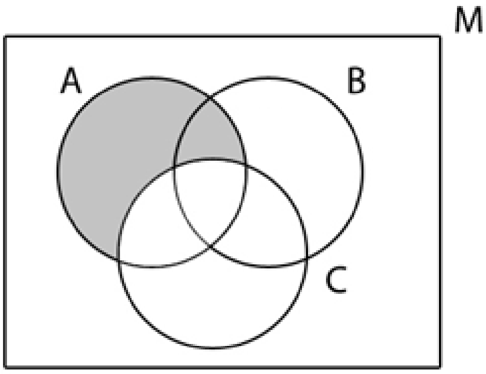
Obrázok 19: Postupne $(A \cup B)$, $(C \cup A)$, $(C \cup A)'$

Potom prienikom oblastí prvého a tretieho diagramu, teda oblasti množiny $[(A \cup B) \cap (C \cup A)']$ sú znázornené na Obrázku 20.



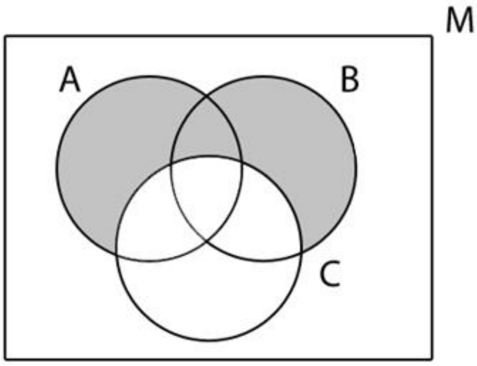
Obrázok 20: $[(A \cup B) \cap (C \cup A)']$

Teraz na Obrázku 21 zobrazíme $(A \cap C')$.



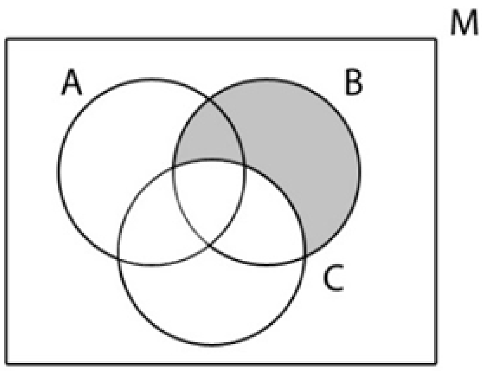
Obrázok 21: $(A \cap C')$

Potom množinu určenú výrazom $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C')$ na ľavej strane tvorí zjednotenie oblastí vyznačených na Obrázku 20 a Obrázku 21 (Obrázok 22).



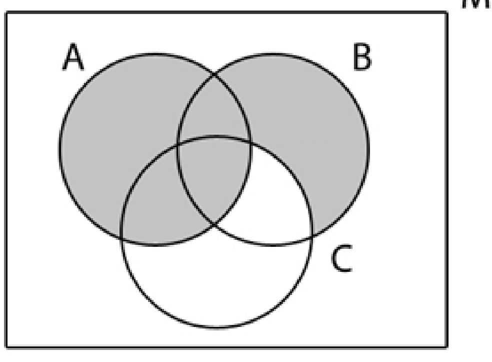
Obrázok 22: $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C')$

Ďalej zobrazíme oblasti množiny $(C' \cap B)$, ktorá je zahrnutá v rámci pravej časti výrazu (Obrázok 23).



Obrázok 23: $(C' \cap B)$

Potom diagram množiny $(C' \cap B) \cup A$ bude vyzerať nasledovne (Obrázok 24):



Obrázok 24: $(C' \cap B) \cup A$

Aby sa množiny $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C')$, $(C' \cap B) \cup A$ rovnali, musia pozostávať z tých istých prvkov. Ak porovnáme diagramy na Obrázku 22 (oblasti množiny $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C')$) a Obrázku 24 (oblasti množiny $(C' \cap B) \cup A$), vidíme, že rovnosť množín nastane práve vtedy, ak $A \cap C = \emptyset$, teda ak prienik množín A a C neobsahuje žiadne prvky, čo je nutná a postačujúca podmienka pre platnosť $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C') = (C' \cap B) \cup A$.