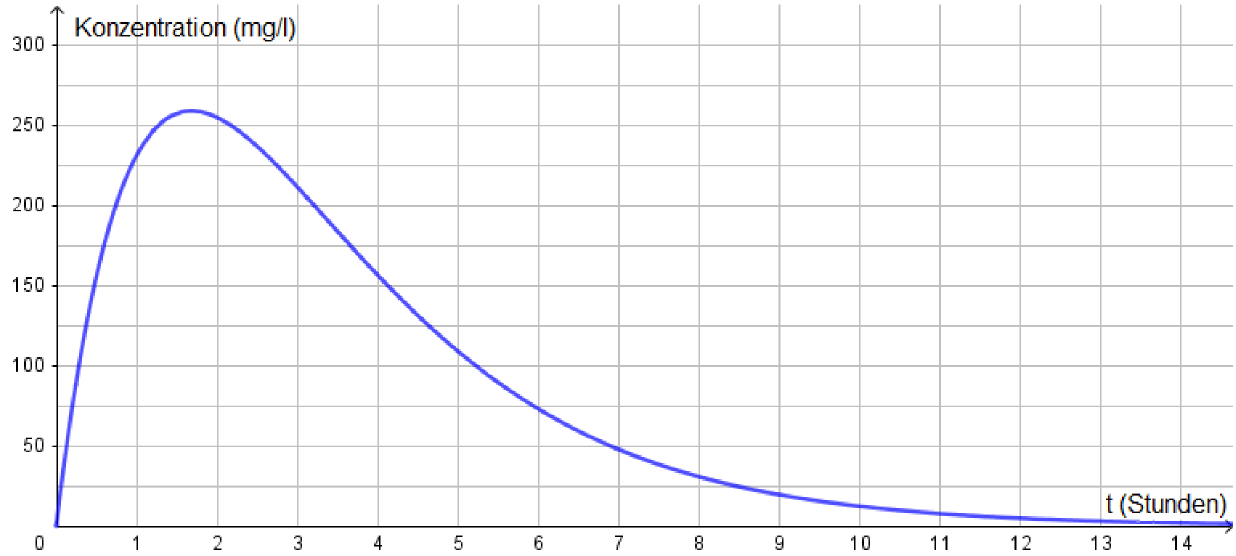
Kofinanziert durch das
Programm Erasmus+
der Europäischen Union

Mathematik Brückenkurs
Kapitel 2e – Einführung in Funktionen

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

Einführungsaufgabe: Einem Patienten wird ein bestimmtes Medikament gespritzt. Die Konzentration des Wirkstoffs im Blut dieses Patienten kann als Funktion über die Zeit beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion ist unten abgebildet.



a) *Wie hoch ist die Konzentration nach 1 Stunde?*
b) *Zu welchem Zeitpunkt nach der Injektion erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?*
c) *Zu welchen Zeitpunkten erreicht die Konzentration 150 mg/l?*
d) *Zu welchem Zeitpunkt fällt die Konzentration am schnellsten?*

1. Einführung in Funktionen

Eine Funktion ist eine Möglichkeit, die Beziehungen zwischen zwei Mengen von mathematischen Objekten zu beschreiben, wobei jedes Objekt der ersten Menge mit genau einem Objekt der zweiten Menge verknüpft ist. In der Schulmathematik handelt es sich bei diesen Objekten häufig um reelle Zahlen, und man findet in mehreren Lehrbüchern die folgende Definition einer *reellen Funktion* (d. h. einer Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen):

Definition (Entwurf): Wenn jedem Element $x \in \mathbb{R}$ genau ein Element $f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, nennt man diese Zuordnung eine *reelle Funktion*. Symbolisch schreibt man $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. x heißt *Argument* oder unabhängige Variable, $f(x)$ heißt *Funktionswert* (an der Stelle x) oder abhängige Variable.

Diese Definition funktioniert gut für einige Funktionen, z. B. lineare Funktionen oder Polynome. Sie ist jedoch weniger geeignet für z. B. rationale Funktionen oder logarithmische Funktionen oder andere Funktionen, die nicht auf den reellen Zahlen als Ganzes, sondern nur auf einer Teilmenge davon definiert sind. Es ist daher üblicher, die obige Definition durch die folgende zu ersetzen:

Definition: Sei A eine Teilmenge der reellen Zahlen, also $A \subseteq \mathbb{R}$. Wenn jedem Element $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, nennt man diese Zuordnung eine *reelle Funktion*. Symbolisch schreibt man $f: A \to \mathbb{R}$. x heißt *Argument* oder unabhängige Variable, $f(x)$ heißt *Funktionswert* (an der Stelle x) oder abhängige Variable. A heißt die *Definitionsmenge* der Funktion. Die zweite Menge – hier also $\mathbb{R}$ – nennt man *Zielmenge* der Funktion.

Beispiel: Ein Sportverein hat 350 Mitglieder. Jedem Mitglied ist eine eindeutige Indexnummer a zugeordnet, d.h. $a \in \{1, 2, \dots, 350\}$. Die Funktion $h: A \to \mathbb{R}$ beschreibt die Zuordnung zwischen der Indexnummer eines Mitglieds und der Körpergröße dieses Mitglieds.

a) Schreiben Sie unter Verwendung dieser Terminologie einen mathematischen Term, der die durchschnittliche Körpergröße aller Clubmitglieder berechnet!
b) Was bedeutet der Ausdruck $h(s) = h(t)$ in diesem Beispiel?

In diesem Beispiel ist die Definitionsmenge eine endliche Menge (eine Teilmenge der natürlichen Zahlen) und nicht die gesamte Menge der reellen Zahlen (da es keinen Sinn machen würde, nach der Körpergröße des Mitglieds 7.25 zu fragen).

Der Prozess der Abänderung einer Definition gibt uns auch ein gutes Beispiel dafür, wie die Mathematik manchmal funktioniert. Mathematiker*innen haben oft ein Bild von bestimmten mathematischen Objekten im Kopf und schreiben eine Definition für diese Objekte auf. Beim Betrachten der niedergeschriebenen Definition stellen sie jedoch fest, dass einige der Objekte, die sie sich vorgestellt haben, nicht in dieser Definition enthalten sind, während gelegentlich andere Objekte, die sie sich ursprünglich nicht vorgestellt haben, von dieser Definition erfasst werden. Die Definition wird dann in einer genaueren Weise umgeschrieben. Oftmals wiederholt sich dieser Vorgang mehrmals.

Für reelle Funktionen wird in der Schule häufig auch die folgende Terminologie verwendet:

Definition: Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Die Menge I_f aller Funktionswerte, $I_f = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$, heißt die *Bildmenge* (oder kurz: das Bild) von f. Die Menge G_f aller geordneten Paare von Argumenten und zugeordneten Funktionswerten, $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in A\}$, heißt der *Graph* dieser Funktion.

Da jedes Paar reeller Zahlen als Punkt in einem Koordinatensystem dargestellt werden kann, lässt sich der Graph auch als eine Menge von Punkten in einem Koordinatensystem darstellen. Diese Darstellung wird manchmal ebenfalls als der Graph der Funktion bezeichnet.

In der Schule wird das Studium der Funktionen in der Regel auf reelle Funktionen beschränkt. Der Begriff kann jedoch, wie oben erwähnt, verallgemeinert werden, um Beziehungen zwischen zwei beliebigen Mengen zu beschreiben.

Definition: Seien A und B zwei Mengen. Wenn jedem Element $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zugeordnet wird, nennt man diese Zuordnung eine *Function*, symbolisch $f: A \to B$. x heißt *Argument* oder unabhängige Variable, $f(x)$ heißt *Funktionswert* (an der Stelle x) oder abhängige Variable. A heißt die *Definitionsmenge* der Funktion. B nennt man die *Zielmenge* der Funktion.

An der Universität werden in speziellen Vorlesungen komplexe Funktionen (wobei A und/oder B Teilmengen der komplexen Zahlen sind) oder mehrdimensionale reelle Funktionen (wobei A und/oder B Teilmengen von $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, oder allgemein $\mathbb{R}^n$ sind) untersucht. Außerdem ist die Untersuchung von Funktionen nicht auf Zahlenmengen (oder Paare, Tripel, … von Zahlen) beschränkt. Man kann auch Funktionen zwischen Mengen von geometrischen Objekten (z. B. in der Topologie) oder Funktionen zwischen Mengen von Funktionen (z. B. in der Funktionalanalysis) untersuchen.