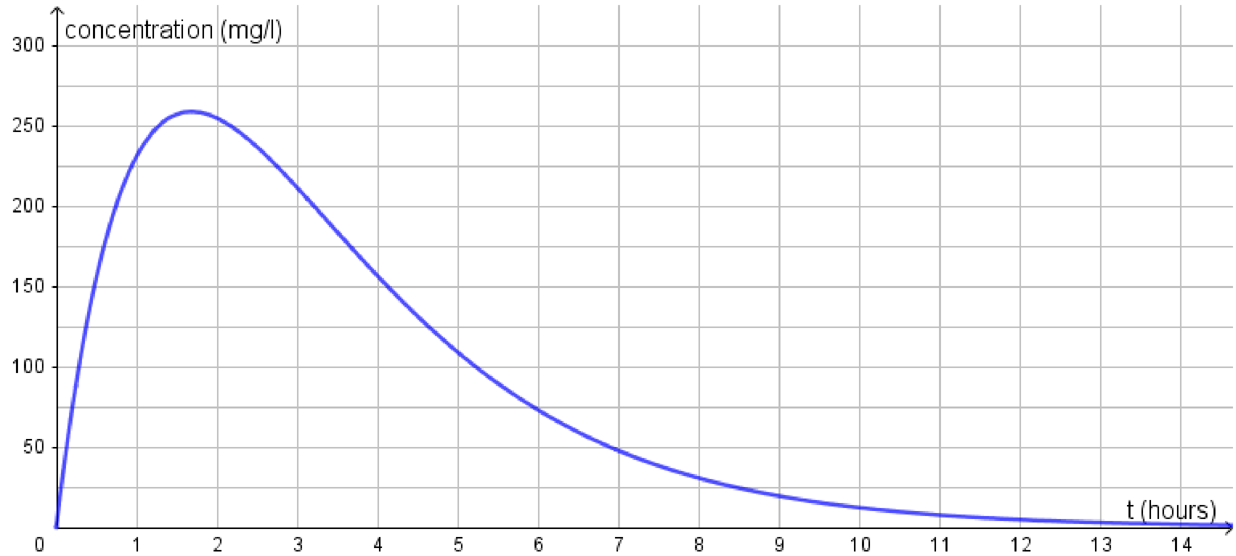
Spolufinancováno
z programu Evropské unie
Erasmus+

Přípravný kurz z matematiky
Lekce 2e – Úvod do funkcí

této publikaci.

Úvodní úloha: Pacient dostává léky formou injekcí. Koncentraci aktivní látky v krvi pacienta můžeme popsat funkcí v čase. Graf funkce vidíte níže.



a) *Jak vysokou koncentraci má pacient v krvi po 1 hodině?*
b) *V jakém okamžiku v čase po injekci dosáhne koncentrace v krvi pacienta nejvyšší hodnoty?*
c) *V jakém bodě v čase dosáhne koncentrace v krvi hodnoty 150 mg/l.*
d) *V jakém bodě v čase klesá koncentrace látky v krvi nejrychleji?*

1. Úvod do funkcí

Funkce je v podstatě způsob jak popsat vztah mezi dvěma množinami matematických objektů, kde každý objekt z první množiny je spojen právě s jedním objektem z druhé množiny. Ve středoškolské matematice se obvykle jedná o reálná čísla. V mnohých učebnicích tak najdeme následující definici reálné funkce (míněno reálné funkce s reálnou proměnnou):

Definice (zjednodušená verze): Jestliže každý prvek $x \in \mathbb{R}$ je asociován s právě jedním prvkem $f(x) \in \mathbb{R}$, můžeme tento vztah nazývat *reálnou funkcí reálné proměnné*, kterou zapisujeme $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde x je *argument* nebo nezávisle proměnná, $f(x)$ je *funkční hodnota* nebo závisle proměnná.

Tato definice dobře funguje pro mnoho funkcí, např. lineární funkce nebo polynomy. Nicméně je méně vhodná pro např. racionální funkce nebo logaritmické funkce nebo jakékoliv další funkce, které nejsou definovány na reálných číslech jako celku, ale pouze na jejich podmnožině. Z tohoto důvodu je obvykle definice pozměněna následovně:

Definice: Nechť A je podmnožina reálných čísel, tj. $A \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže každý prvek $x \in A$ je asociován s právě jedním prvkem $f(x) \in \mathbb{R}$, je tento vztah nazýván *reálnou funkcí*, vyjádřen následovně $f: A \to \mathbb{R}$, kde x je *argument* nebo nezávisle proměnná, $f(x)$ je *funkční hodnota* nebo závisle proměnná. Množina A je nazývána *definičním oborem* funkce. Druhá množina – tj. $\mathbb{R}$ – je nazývána *oborem hodnot*.

To nám také nabízí dobrý příklad toho, jak funguje matematika. Matematici často mají na mysli množinu určitých matematických objektů, které se pokusí jednoznačně definovat. Když se pak na napsanou definici podívají, zjistí, že některé objekty, které si představovali, nejsou v definicí zahrnuty, a na stranu druhou objekty, které neuvažovali, definicí vyhovují. Musí pak definici přepsat přesněji a mnohdy takový postup několikrát opakovat.

Ve školách se často pro reálné funkce používá i následující terminologie:

Definice: Nechť $f: A \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Množina I_f všech funkčních hodnot, $I_f = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$, se nazývá *obraz* f. Množina G_f všech dvojic argumentů a jejich funkčních hodnot $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in A\}$ je nazývána *graf* funkce.

Vzhledem k tomu, že každá dvojice reálných čísel může být znázorněna jako bod v souřadnicovém systému, může být také graf znázorněn jako množina bodů v souřadnicovém systému. Toto znázornění je také někdy nazýváno jako graf funkce.

Na středních školách je studium funkcí obvykle omezeno na reálné funkce. Tento termín však může být zobecněn a využit pro popis vztahu mezi jakýmikoliv dvěma množinami.

Definice: Nechť A a B jsou množiny. Jestliže každý prvek $x \in A$ je asociován s právě jedním prvkem $f(x) \in B$, je tento vztah označován jako *funkce*, symbolicky zapsanou $f: A \to B$, kde x je *argument* nebo nezávisle proměnná, $f(x)$ je *funkční hodnota* nebo závisle proměnná. A je *definiční obor* funkce, B je *obor hodnot* funkce.

Na univerzitě se pak speciální přednášky věnují i komplexním funkcím (kde A a/nebo B jsou podmnožiny komplexních čísel) nebo multidimenzionálním reálným funkcím (kde$A$ a/nebo B jsou podmnožiny $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, nebo obecněji $\mathbb{R}^n$). Studium funkcí také není omezeno pouze na množiny čísel (nebo dvojic, trojic, …). Můžeme také studovat funkce mezi množinami geometrických objektů (např. v topologii) nebo funkce mezi množinami funkcí (např. ve funkcionální analýze).