Spolufinancované z programu Európskej únie Erasmus+

Matematika – premostenie vedomostí
Časť 3a – Lineárne a kvadratické funkcie

Vytvorenie tejto publikácie podporila Európska komisia. Podpora Európskej komisie neznamená schválenie obsahu publikácie. Obsah publikácie odráža iba názory autorov a Komisia nie je zodpovedná za použitie informácií v publikácií obsiahnutých.

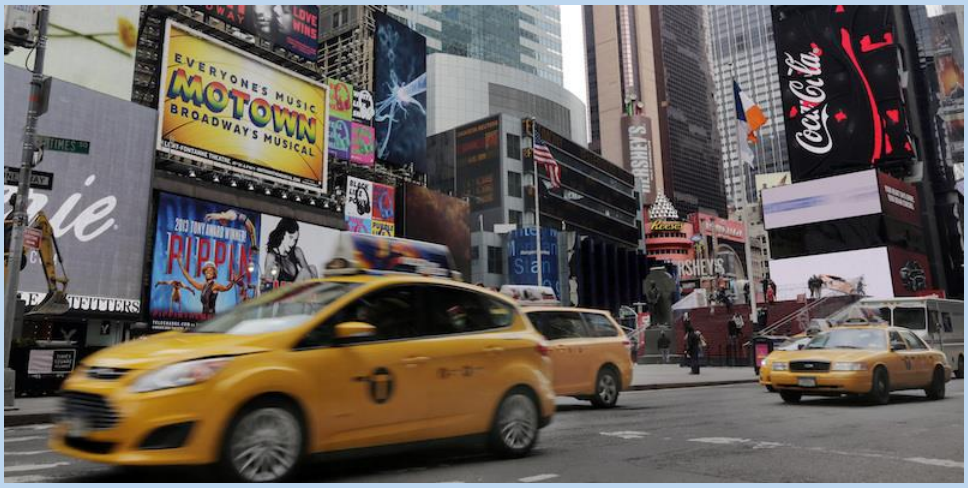
3.1. Úvod do lineárnych funkcie

3.1.1 Lineárne funkcie

Lineárne rovnice sa často používajú na vyjadrenie vzťahu medzi dvoma premennými, ktoré býva zvykom označovať písmenami x a y. Každý možný lineárny vzťah je modifikáciou tejto rovnice. Jednu z premenných môžeme vynásobiť konštantou alebo pripočítať konštantu k obom stranám rovnice, avšak stále ide o lineárny vzťah.

Úloha 3.4.

Ak sa rozhodneme naskočiť do taxíka v New Yorku, tak sa môže stať, že okamžite naskočí platba 3,30 USD, čomu sa hovorí "nástupné" v prípade, že taxameter je aktivovaný.



Po zaplatení poplatku, bude na taxametri naskakovať za každú míľu jazdy hodnota 2.50 USD.

Riešenie úlohy 3.4.

V tomto prípade bude samozrejme celková cena za jazdu pozostávať z ceny za jazdu a "nástupného". Označme si písmenom *m* počet míľ, ktoré nás taxík bude prepravovať nech *C* je celková cena v USD ako funkcia prejdených míľ: *C(m)*.

Vieme, že $C(0) = 3{,}30$. Keďže za prvú míľu zaplatíme 2,50 USD, tak

$$C(1) = 3{,}30 + 2{,}0 = 5{,}80$$

Ak prejdeme ďalšiu míľu, tak za jazdu zaplatíme:

$$C(2) = 3{,}30 + 2{,}50 + 2{,}0 = 3{,}30 + 2{,}50(2) = 8.{,}0$$

Ak prejdeme aj tretiu míľu, tak sa cena navýši o ďalších 2.50 USD a to na hodnotu 10,80 USD.

Takto vidíme, že ak *m* predstavuje počet prejdených míľ, tak $C(m) = 3{,}30 + 2{,}50m$

V tabuľke vidíme, ako sa každou prejdenou míľou navýši cena prepravy o 2,50 USD za míľu.

m	0	1	2	3
C(m)	3.30	5.70	8.10	10.50

Grafickým znázornením rovnice, $C(m) = 3{,}30 + 2{,}50m$ je priamka a to je aj dôvodom, prečo sa tieto funkcie nazývajú *lineárne.*

Ak je počet prejdených míľ 0, tak cena jazdy je 3,30USD, čo je na grafe bod so súradnicami (0, 3,30). Tento bod je priesečníkom lineárnej funkcie C(m) s vertikálnou osou. Grafom je rastúca priamka, ktorá rastie smerom zľava doprava, pretože za každú míľu sa cena jazdy zvýši o 2,50 USD.

Grafom lineárnej funkcie je priamka. Lineárne funkcie je vždy možné vyjadriť v tvare:

$$f(x) = b + mx$$

alebo

$$f(x) = mx + b;$$

kde:

b je absolútny člen funkcie (keď x = 0), a

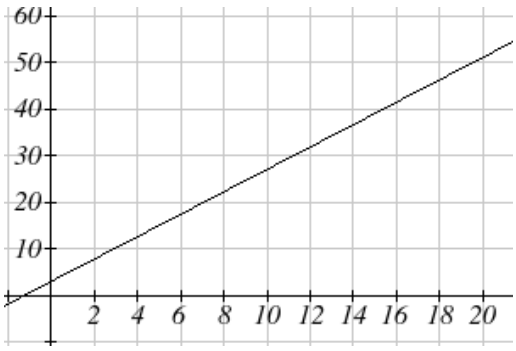
m je lineárny člen, vyjadrujúci konštantnú mieru zmeny funkcie.

Hodnota lineárneho člena určuje, či ide o rastúcu alebo o klesajúcu funkciu

$$f(x) = b + mx$$

Funkcia je rastúca, ak

$$m > 0$$



$$f(x) = b + mx$$

Je klesajúca funkcia, ak:

$$m < 0$$

Ak

$$m = 0$$

Tak funkcia nemení svoju hodnotu a miera jej zmeny je tak nulová:

$$f(x) = b + 0x = b$$

je to teda horizontálna priamka prechádzajúca bodom (0, b), ktorá nie je rastúca ani klesajúca – je konštantná.

Z grafického hľadiska je v rovnici:

$$f(x) = b + mx$$

b je priesečník s vertikálnou osou, čiže jedným z bodov priamky je bod (0,b), *m* je lineárny člen (sklon priamky) a prezrádza nám o koľko sa zmení hodnota funkcie *f,* ak sa hodnota x zmení o jednu jednotku. Priesečníky funkcie s horizontálnou osou sa nazývajú nulové body funkcie. Ak funkcia má nulový bod, tak ho možno nájsť riešením rovnice

f(x) = 0.

Rovnica konštantnej funkcie (rovnobežnej s horizontálnou osou) má tvar

$$f(x) = b$$

Vertikálne priamky majú rovnice v tvare

x = a

Nech sú dané dve hodnoty x_1 a x_2 a im zodpovedajúce hodnoty y_1 a y_2, prípadne množina bodov (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Ak chceme nájsť predpis lineárnej funkcie takej, že oba tieto body na nej ležia, tak musíme určiť hodnotu lineárneho členu, *m*:

$$m = \frac{zmena\ y}{zmena\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Miera zmeny lineárnej funkcie sa nazýva tiež smernica priamky.

Poznámka: V zápise funkcie označíme $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$ a potom môžeme písať

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dve priamky sú rovnobežné, ak majú rovnaké smernice (alebo ak sú obe priamky kolmé na horizontálnu os). Nech sú dané dve lineárne rovnice $f(x) = b + m_1 x$ a $f(x) = b + m_2 x$.

Im zodpovedajúce priamky sú rovnobežné, ak:

$m_1 = m_2$

Priamky sú kolmé, ak:

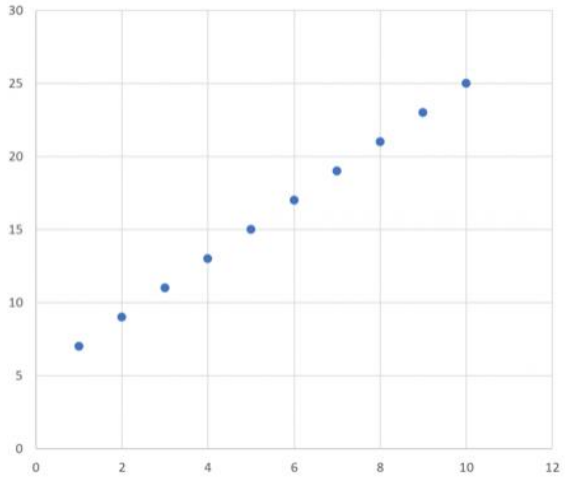
$m_1 m_2 = -1$, čiže $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Hovoríme, že smernice dvoch navzájom kolmých priamok sú záporne vzatými prevrátenými hodnotami.

Priesečník dvoch priamok existuje iba v prípade, že nie sú rovnobežné (výnimkou by bol prípad ak by boli totožné). Priesečníkom je ten bod definičného oboru funkcií, v ktorom obe nadobúdajú rovnakú hodnotu. Preto, ak hľadáme x-ovú súradnicu tohto bodu, tak je potrebné nájsť riešenie rovnice

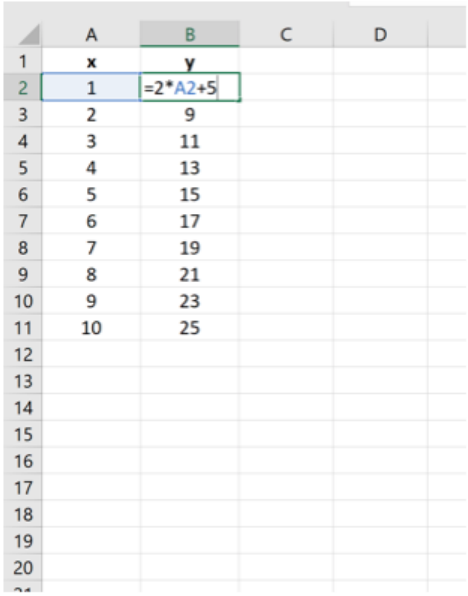
$$f(x) = g(x).$$

Zaujímavou je v tomto smere aplikácia v na vizualizáciu lineárnej funkcie vytvorená v programe Excel v rámci STEM vzdelávania. Uvažujme napríklad funkciu $y = 2x + 5$, ktorej graf si chceme vytvoriť.



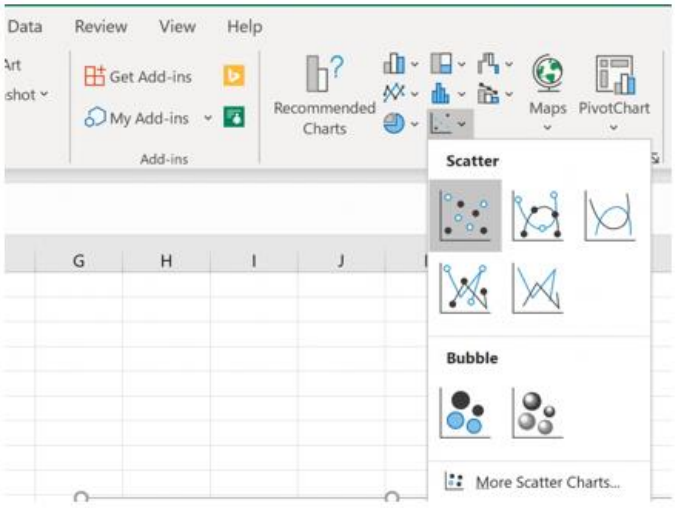
Postupujeme nasledovne:

1. *Na základe predpisu funkcie vypočítame jej funkčné hodnoty pre celočíselné hodnoty x od 1 do 10*



	A	B	C	D
1	x	y		
2	1	=2*A2+5		
3	2	9		
4	3	11		
5	4	13		
6	5	15		
7	6	17		
8	7	19		
9	8	21		
10	9	23		
11	10	25		
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

2. *Označíme si hodnoty v bunkách A2:B11.*
3. *Na hornej lište si vyberieme možnosť **Vložiť**.*
4. *Z rôznych možností grafov si vyberieme **bodový graf** (Scatter)*



Ďalšie výučbové materiály vo forme videí k problematike lineárnych a nelineárnych funkcií môžete získať na stránkach Khan: https://www.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/linear-nonlinear-functions-tut/v/linear-and-nonlinear-functions-example-3

3.1.5 Modelovanie prostredníctvom lineárnych funkcií

Ak hovoríme o matematickom modelovaní, tak tým myslíme, že sa matematickými nástrojmi pokúšame popísať určité reálnu situáciu, problém. Matematické modelovanie pozostáva z troch krokov: *formulácia, matematická manipulácia* a *overenie*.

Prvým krokom modelovania je teda na základe pozorovaní definovať pre model relevantné veličiny, vzťahy medzi nimi a následne model matematicky formulovať.

Keď už máme model matematicky sformulovaný, tak druhým krokom sú výpočty resp. matematické manipulácie s modelom, ktoré nám pomôžu získať odpoveď na našu pôvodnú otázku. Nakoniec je potrebné skúmať nakoľko sa model zhoduje so skutočnosťou. Ak je zhoda malá, alebo nepostačujúca tak je potrebné buď model preformulovať alebo ho upraviť. V každom prípade však posledné dva kroky sú rovnaké – matematická manipulácia a overenie.

Ako sme už uviedli, tak pre študentov je riešenie reálnych úloh využitím lineárnej funkcie alebo lineárnej rovnice zvyčajne náročné. Proces modelovania musí obsahovať vždy všetky tri uvedené fázy. Tieto sa však navzájom veľmi líšia a to je aj jedným z dôvodov prečo je modelovanie náročné.

Už uvedené by sme mohli stručne zhrnúť nasledovne:

1) Určte veličiny, ktoré sa menia a potom jasne a presne definujte premenné, ktoré budú tieto veličiny reprezentovať.

2) Pozorne si prečítajte zadanie úlohy a vyberte všetky potrebné informácie. Hľadajte informácie, ktoré vyjadrujú hodnoty premenných alebo hodnoty pre niektorú časť modelu ako napríklad počiatočná hodnota premennej, smernica priamky (ak sa jedná o lineárnu závislosť)

3) Pozorne si prečítajte zadanie, aby ste správne určili čo je potrebné zistiť, určiť, vyriešiť alebo interpretovať.

4) Stanovte si postup, ktorým prejdete od zadaných informácií k tomu, čo je cieľom zistiť. Často to zahŕňa kontrolu jednotiek v ktorých sú veličiny uvedené, tvorbu tabuľky alebo vytvorenie predpisu funkcie, ktorá sa bude na modelovanie problému používať.

5) Ak to je potrebné, tak vytvorte funkčný predpis.

6) Nájdite riešenia Vami vytvorených rovníc.

7) Zamyslite sa nad tým, či je Vaša odpoveď zmysluplná a matematicky správna.

8) Vo vhodných jednotkách a zrozumiteľnou formou uveďte Vami zistené výsledky, ideálne vo forme celých viet.

Príkladom modelovania s využitím lineárnej funkcie môžu byť náklady firmy:

Úloha 3.5

Matematicky opíšte typickú situáciu akejkoľvek výrobnej firmy ohľadne jej nákladov.

Riešenie úlohy 3.5

Každá výrobná firma má dva typy nákladov: *fixné* a *variabilné*.

Fixné náklady sú tie, ktoré nezávisia od veľkosti produkcie. Tieto náklady zahŕňajú dane z nehnuteľnosti, úroky z úverov, platy manažérov, údržbu a ochranu zariadení.

Variabilné náklady závisia od veľkosti produkcie. Celkové náklady firmy sú súčtom fixných a variabilných nákladov:

náklady = (variabilné náklady) + (fixné náklady).

Nech x vyjadruje počet jednotiek určitého tovaru, ktorý firma vyrába. (Môžeme preto povedať, že $x \geq 0$.)

Takýmito jednotkami môžu byť balíky bavlny, tony hnojiva alebo množstvo vyrobených automobilov.

V lineárnom modeli nákladov predpokladáme, že náklady *m* na výrobu jednej jednotky tovaru sú rovnaké bez ohľadu na to, koľko jednotiek tovaru sa vyrobí. Variabilné náklady sú preto rovné počtu vyrobených jednotiek krát náklady na každú jednotku:

Variabilné náklady = (náklady na jeden výrobok) × (počet vyrobených jednotiek) = mx

Ak b sú fixné náklady a C(x) sú náklady, tak máme:

C(x)=náklady= (variabilné náklady) + (fixné náklady) = mx+b

Ďalšie zaujímavé didaktická videá môžete nájsť na stránke Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/8th-linear-functions-modeling/v/exploring-linear-relationships

Mnoho materiálov pre budúcich učiteľov matematiky obsahujúcich informácie o tejto problematike je možné nájsť na stránkach projektu ARAL:

http://www.progettoaral.it/aral-project/

3.2. Úvod do kvadratických funkcie

3.2.1 Kvadratické funkcie a kuželosečky

Funkcia f v tvare $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde *a, b,* a *c* sú konštanty, pričom $a \neq 0$ sa nazýva kvadratická funkcia. Najjednoduchší tvar kvadratickej funkcie je $f(x) = x^2$, ktorej graf sa nazýva *parabola*. Parabola je grafom kvadratickej funkcie.

Vrchol paraboly je bod, ktorým prechádza os súmernosti paraboly pretína parabola.

Každá parabola je súmerná podľa priamky, ktorá sa nazýva os súmernosti.

Uvažujem napríklad paraboly $f(x) = x^2$ a $g(x) = -3(x + 5)^2 - 7$ s osami súmernosti $x = 0$ a $x = -5$.

Vrchol paraboly je taktiež bod, v ktorom parabola nadobúda buď maximum alebo minimum a to v závislosti od toho do ktorej strany smerujú jej ramená. Ktorá z dvojice možností nastáva závisí od hodnoty kvadratického člena (koeficientu pri x^2): ak pre parabolu $f(x) = ax^2 + bx + c$ je $a > 0$, tak ramená smerujú nahor a vrchol je bod v ktorom nadobúda parabola minimum. Ak $a < 0$, tak ramená smerujú nadol a vrchol je bod v ktorom parabola nadobúda maximum.

Priesečník paraboly $f(x) = ax^2 + bx + c$ s osou y je bod (0, *c*).

Úprava na úplný štvorec a kvadratický výraz

Jedným zo spôsobov ako určiť vrchol paraboly, je *úprava na úplný štvorec*. Našim cieľom je určiť o akú hodnotu je potrebné posunúť parabola v horizontálnom smere, aby bol predpis kvadratickej funkcie v tvare $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Vrcholom paraboly je potom bod (*h, k*).

Paraboly a kvadratické funkcie

Na získanie vzťahu pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice môžeme využiť úpravu na úplný štvorec. Máme teda funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ a hľadáme vzťah, ktorý by vyjadroval pre ktorá hodnoty platí, že $f(x) = 0$.

Uvažujme rovnicu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, a *c sú reálne čísla, pričom a* = 0.

Ako sme už uviedli, tak:

• *Ak $b^2 - 4ac < 0$, tak kvadratická rovnica nemá v množine reálnych čísel riešenie.*

• *Ak $b^2 - 4ac = 0$, potom má kvadratická rovnica práve jedno riešenie:*

$$x = -b/2a$$

- *Ak $b^2 - 4ac > 0$, potom má rovnica v množine reálnych čísel práve dve riešenie:*

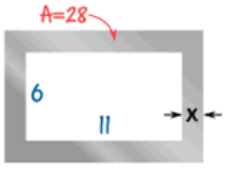
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nech f je taká kvadratická funkcia, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jedno riešenie. Dokážte, že, toto riešenie je x-ovou súradnicou vrcholu paraboly.

V ďalšej časti dokončíme tému kvadratických výrazov. Na internetových stránkach je možné nájsť mnoho zaujímavých úloh z reálneho života, v ktorých sa využívajú práve kvadratické funkcie resp. kvadratické rovnice, ako napríklad táto úloha.[1]:

Úloha 3.12

Príklad: Malý oceľový rámik



Vaša spoločnosť ako súčasť nového produktu, ktorý uvádza na trh, bude vyrábať oceľové rámiky.

Rámik sa bude vyrábať z ocele a aby bola jeho hmotnosť neprekročila požadovanú hodnotu, tak jeho povrch by mal byť **28 cm2**.

Vnútorná strana rámika má mať rozmery **11 cm** a **6 cm**.

Aká má byť hrúbka **x** oceľového rámika?

Riešenie úlohy 3.12

Obsah plochy oceľového plechu pred vystrihnutím:

$$\text{Obsah} = (11 + 2x) \times (6 + 2x)\ \text{cm}^2$$

$$\text{Obsah} = 66 + 22x + 12x + 4x^2$$

$$\text{Obsah} = 4x^2 + 34x + 66$$

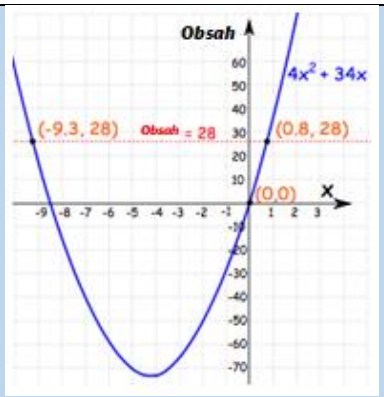
Obsah plochy rámika po vystrihnutí vnútorných 11 × 6 :

$$\text{Obsah} = 4x^2 + 34x + 66 - 66$$

$$\text{Obsah} = 4x^2 + 34x$$

[1] Cfr. https://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html

Graficky:



Požadovaná plocha 28 cm^2 je naznačená priamkou rovnobežnou s osou x.

Obsah plochy je 28 cm^2 ak:

x je približne −9,3 alebo 0,8

Keďže záporná hodnota nemá v tomto prípade praktický význam, tak hľadaná šírka rámika je : x = 0,8 cm (približne).

Kružnice: niekoľko poznámok

Kružnica je množina bodov, ktoré sú rovnakej vzdialenosti od daného bodu, ktorý nazývame stred kružnice. Táto rovnaká (konštantná) vzdialenosť sa nazýva *polomer* kružnice. Zo vzťahu pre vzdialenosť dvoch bodov v rovine dostaneme rovnicu kružnice:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

So stredom v bode (h, k) a polomerom r.

Úloha 3.13

Nájdite stred a polomer kružnice danej rovnicou:

$$(3x - 3)^2 + 3(y + 5)^2 = 98.$$

Elipsy: niekoľko poznámok

Elipsa je množina bodov, ktorých súčet vzdialeností od dvoch pevne zvolených bodov (ohnísk) je konštantná. Rovnica *elipsy* je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Kde dĺžka hlavnej osi je $2a$, a dĺžka vedľajšej osi je $2b$. Ohniská spolu so stredom elipsy sa nachádzajú na hlavnej osi vo vzdialenosti c od stredu elipsy. V závislosti od

toho, či $a > b$ alebo $b > a$ platí $a^2 = b^2 + c^2$ or $b^2 = a^2 + c^2$.

Hyperboly: niekoľko poznámok

Hyperbola je množina bodov s konštantným rozdielom vzdialeností od dvoch pevne zvolených bodov (ohnísk). Rovnica *hyperboly*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

alebo

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

pričom v jej stredu vieme zostrojiť obdĺžnik so stranami dlhými $2a$ a $2b$. Ramená hyperboly smeru nadol a nahor, ak znamienko pri člene y je kladné. Ohniská ležia na osi s kladným znamienkom, vo vzdialenosti c od jej stredu, pričom $c^2 = a^2 + b^2$.

Iné zdroje:

V prípade záujmu ponúkame aj zoznam relevantných zdrojov k riešenej problematike:

Wolfram Problem Generator

https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-basic-eq-ineq/alg-old-school-equations/v/algebra-linear-equations-1

https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-basic-eq-ineq/alg-old-school-equations/v/algebra-linear-equations-2

https://www.khanacademy.org/test-prep/sat/sat-math-practice/new-sat-heart-of-algebra/v/sat-linear-equation-harder

https://www.khanacademy.org/test-prep/sat/sat-math-practice/new-sat-heart-of-algebra/v/sat-linear-equation-easier

https://www.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/linear-nonlinear-functions-tut/v/linear-and-nonlinear-functions-example-3

https://www.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/8th-linear-functions-modeling/v/exploring-linear-relationships

http://www.progettoaral.it/aral-project/

https://us.sofatutor.com/mathematics/videos/word-problems-with-quadratic-equations

https://www.onlinemathlearning.com/quadratic-equations-word-problems.html

https://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html

https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiH5oHcuJzuAhUECuwKHfsFCzQQFjAIegQIBxAC&url=http%3A%2F%2Fspot.pcc.edu%2F~kkling%2FMth_95%2FSectionV_Quadratic_Equations_and_Functions%2FModule3%2FModule3_Graphing_Quadratic_Functions_Pete_old.doc&usg=AOvVaw0QUc66lJMw9-xCKtLwra1t

https://ncert.nic.in/textbook/pdf/hemh102.pdf

https://www.khanacademy.org/test-prep/sat/sat-math-practice/new-sat-heart-of-algebra/v/sat-linear-equation-harder