Bendrai finansuojama pagal
Europos Sąjungos programą
„Erasmus+“

Matematikos išlyginamasis kursas
3c skyrius – Trigonometrinės funkcijos

Europos Komisijos parama šio leidinio kūrimui nereiškia pritarimo turiniui, kuris atspindi tik autorių požiūrį, ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą.

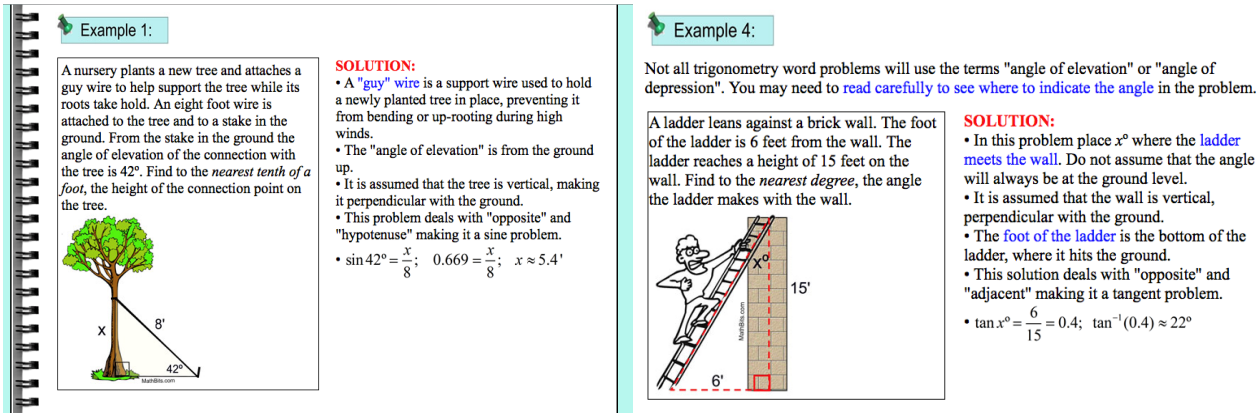
1. Įvadas į trigonometrines funkcijas

Kaip ir kituose skyriuose, taip ir trečiajame norime pabrėžti idėją, kad trigonometrinės funkcijos turi būti pateiktos klasėje, norint susieti matematikos teoriją su realiais mokinių gebėjimais per įdomius dirgiklius ir požiūrį. Čia trumpai pristatome kai kuriuos iš jų.

Pagal šią idėją, didaktinis pradinis taškas turėtų būti klasėje parodyti pvz mokinio sukurtą vaizdo įrašą kaip šį https://www.youtube.com/watch?v=Qv2W0KM3W4c ir apie tai diskutuoti.

Kitas požiūris yra tinkamai išreikštas kitame video:

(https://mathbitsnotebook.com/Geometry/Trigonometry/TGElevDepress.html): prašant moksleivių tai



„išspręsti“..

Kitaip mokytojas gali pradėti atrasti trigonometrijos istoriją ir susieti su realiu studentų gyvenimu. Šiuo požiūriu šis video gali būti itin naudingas: https://www.youtube.com/watch?v=RxsdDkgJRAY

Žinoma, po to mokytojas turi pristatyti trigonometrinę teoriją, pradedant nuo bendros kampo sampratos ir jos ypatybių. Šiame skyriuje bandome apibendrinti kai kurias svarbias ir naudingas pastabas, kad atkreiptume dėmesį į trigonometrines funkcijas ir galimą jų taikymą mokyklinės matematikos kontekste. Žinoma, tekstas nėra baigtinis, tačiau juo siekiama atkreipti dėmesį į kai kuriuos elementarius matematikos teorinius aspektus.

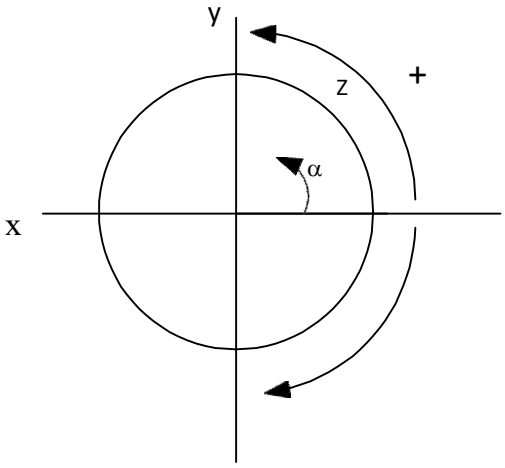
1.1. Trigonometrinis apskritimas

Paimkite x ašį ir y ašį (ortonormalią) ir tegul O yra pagrindas. Apskritimas, kurio centras yra O ir kurio spindulys = 1, vadinamas trigonometriniu apskritimu arba vienetiniu apskritimu. Sukimas prieš laikrodžio rodyklę yra teigiama orientacija trigonometrijoje (1 pav.).

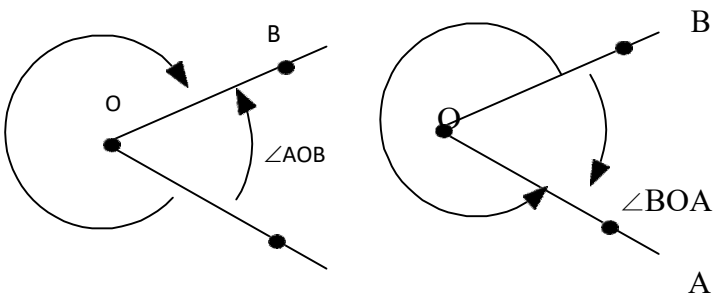
https://vaizdopamokos.lt/matematika/trigonometrines-nelygybe-ir-vienetinis-apskritimas/

Kampas yra figūra, sudaryta iš dviejų spindulių, turinčių tą patį pradžios tašką. Tas taškas vadinamas viršūne, o du spinduliai – kampo kraštinėmis (taip pat kojomis). Jei vadiname [OA pradine kampo puse, o [OB - terminaline puse, tada turime orientuotą kampą. Šis kampas vadinamas ∠AOB, o orientacija rodoma rodykle nuo pradinės pusės iki terminalinės pusės. Rodyklę galime nubrėžti ir priešinga kryptimi, vis dar pradedant nuo pradinės kampo pusės [OA. Abu kampai reiškia tą patį orientuotą kampą. Kampas ∠BOA yra kitoks orientuotas kampas, kurį vadiname priešingu ∠AOB kampu (2 pav.).

Orientuotas kampas yra visų kampų, kurie gali būti transformuojami vienas į kitą sukant ir (arba) paverčiant, rinkinys!

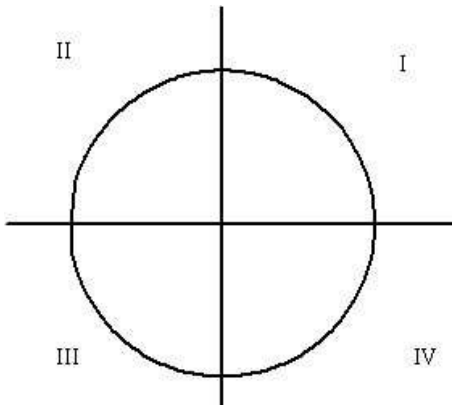


pav. 1 : trigonometrinis apskritimas



pav. 2 : kampai ∠AOB ir ∠BOA

Trigonometrinio apskritimo įvedimas leidžia prie kiekvieno orientuoto kampo $\angle AOB$ pridėti reikšmę, kurią nuo šiol vadinsime. Pavaizduokite orientuotą kampą trigonometriniame apskritime ir tegul pradinė šio kampo pusė sutampa su x ašimi (žr. 1 pav.). Tada galinė pusė kerta trigonometrinį apskritimą taške Z. Tada Z yra orientuoto kampo vaizdas trigonometriniame apskritime.



pav. 3: keturi kvadrantai

Pirmasis kvadrantas

Viršutiniame dešiniajame kvadrante, dar vadinamame I kvadrantu, bus tik taškai, esantys tarp 0 ir teigiamos begalybės tiek x, tiek y ašims. Todėl bet kuris taškas, pažymėtas (x, y), pirmame kvadrante, bus teigiamas tiek x, tiek y. Taigi koordinačių [(+) x, (+) y] sandauga bus teigiama.

Antrasis kvadrantas

Viršutinis kairysis kvadrantas arba II kvadrantas identifikuoja tik taškus, esančius kairėje nuo nulio (neigiamas) x ašyje, ir taškus, esančius virš nulio (teigiamą) ant y ašies. Taigi bet kuris antrojo kvadranto taškas bus neigiamas x verte ir teigiamas y reikšme. Šių koordinačių sandauga [(-) x, (+) y] yra neigiama.

Trečiasis kvadrantas

Apatinė kairioji tinklelio dalis, III kvadrantas, nurodo taškus, mažesnius už nulį tiek x, tiek y ašyse. Bet kuris šio kvadranto taškas bus neigiamas tiek x, tiek y reikšmėmis. Šių koordinačių sandauga [(-) x, (-) y] visada yra teigiama.

Ketvirtasis kvadrantas

IV kvadrantas, apatinėje dešinėje diagramos pusėje, yra tik taškai, esantys dešinėje nuo nulio x ašyje ir žemiau nulio ties y ašyje; todėl visi šio kvadranto taškai turės teigiamą x ir neigiamą y vertę. Šių koordinačių sandauga [(+) x, (-) y] bus neigiama.

Yra du dažniausiai naudojami kampų matavimo vienetai. Labiau pažįstamas matavimo vienetas yra laipsniai. Apskritimas padalintas į 360 lygių laipsnių, kad stačias kampas būtų 90°. Kiekvienas laipsnis suskirstytas į 60 minučių ir kiekviena minutė į 60 sekundžių. Simboliai °, ' ir " yra naudojami laipsniams, lanko minutėms ir lanko sekundėms žymėti.

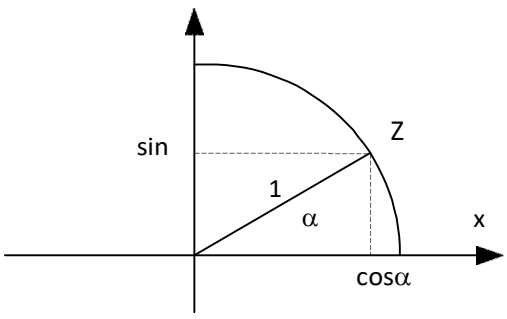
Daugumoje matematikos vadovėlių kampai paprastai matuojami radianais, o ne laipsniais.
1 radiano kampas nustato apskritime lanką, kurio ilgis yra apskritimo spindulys. Kadangi viso apskritimo ilgis yra 2πR, apskritime yra 2π radianai. Priešingai, jei apskritimo, kurio spindulys R, centre nubrėžiamas θ radianų kampas, tai šis kampas nustato apskritimo, kurio ilgis θ•R, lanką. Radianų poskyriai rašomi dešimtaine forma.

Šalia Z galite įdėti begalinį skaičių reikšmių, kurios viena nuo kitos skiriasi sveikuoju 360° arba 2· kartotiniu, nes galite atlikti daugiau posūkių viena ar kita kryptimi, pradedant nuo pradinės kampo pusės ir pasiekiant kampo galinė pusė (šie kampai vadinami bendragaliniais). Visų šių reikšmių aibė vadinama orientuoto kampo α matu. Pagrindinė α reikšmė yra ta vertė, kuri priklauso]-180°, 180°],

Čia:
https://www.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:trig/x2ec2f6f830c9fb89:radians/v/radian-and-degree-conversion-practice galima rasti pastabų apie konvertavimo tarp radianų ir laipsnių procesą.

1.2 sinα, cosα ir jų santykiai

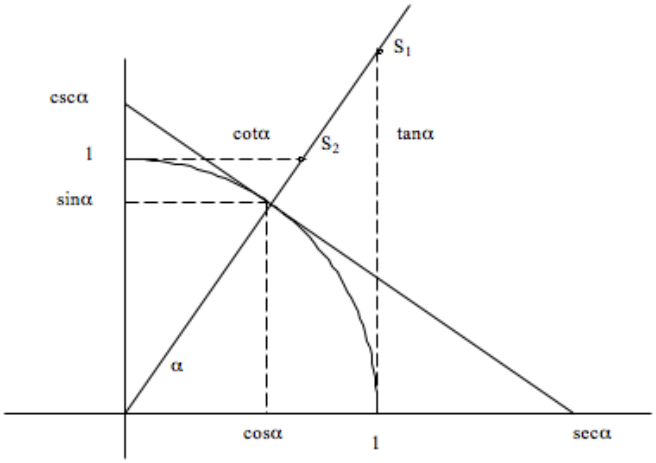
Apsvarstykite orientuoto kampo α konstrukciją, kaip aprašyta ankstesnėje pastraipoje. Galinė kampo kraštinė α kerta vienetinį apskritimą taške Z. Sinα galima apibrėžti kaip šio taško y koordinatę.
Cos α gali būti apibrėžta kaip šio taško x koordinatė. Tokiu būdu galime rasti bet kurios tikrosios vertės α sinusą arba kosinusą. Ir atvirkščiai, kosinuso reikšmės ir sinuso reikšmės pasirinkimas intervale [0,2π[apibrėžia tik vieną kampą. Apskritai yra begalė sprendimų, kuriuos galima rasti sudėjus 2π kartotinius.



pav. 4 : Sinusas ir kosinusas trigonometriniame apskritime

Be sinuso ir kosinuso kiti trigonometriniai skaičiai. Plačiau galima rasti čia: https://lietuvai.lt/wiki/Trigonometrija

5 pav. grafiškai pavaizduoti aukščiau pateikti trigonometriniai skaičiai, išreikšti atstumais, susietais su vienetiniu apskritimu



pav. 5 : grafinis trigonometrinių skaičių atvaizdas atstumais, susietais su vienetiniu apskritimu

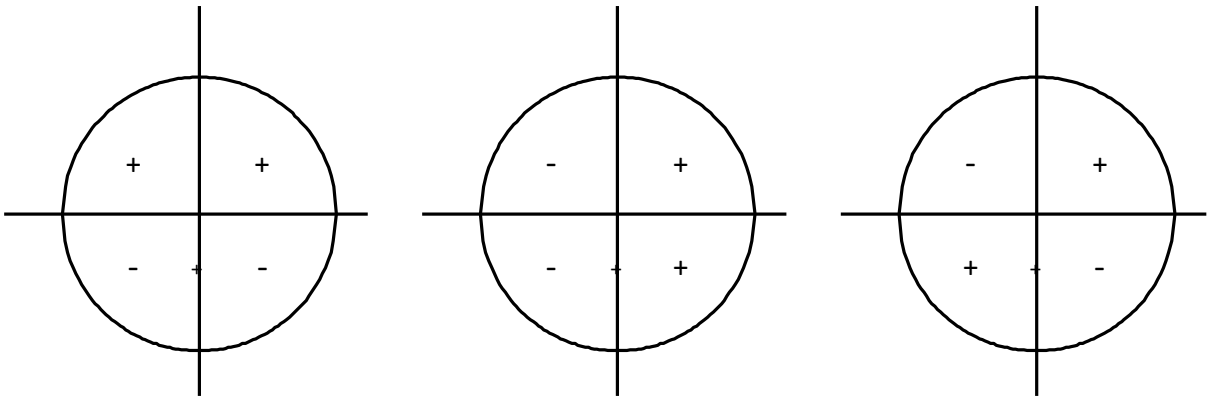
Todėl trigonometriniai skaičiai turi vertes, kurios yra šiose srityse:

sin α	[-1,1]	cos α	[-1,1]
tan α	] -∞ , +∞ [	cot α	] -∞ , +∞ [
sec α	] -∞ , −1] ∪ [1, +∞ [	csc α	] -∞ ,−1] ∪ [1, +∞ [

Kai kurie specialieji kampai ir jų trigonometriniai skaičiai

α	0	30° = π/6	45° = π/4	60° = π/3	90° = π/2
sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan α	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot α	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
sec α	1	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{2}$	2	∞
csc α	∞	2	$2/\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1

Kvadranto viduje trigonometriniai skaičiai išlaiko tą patį ženklą (6 pav.).



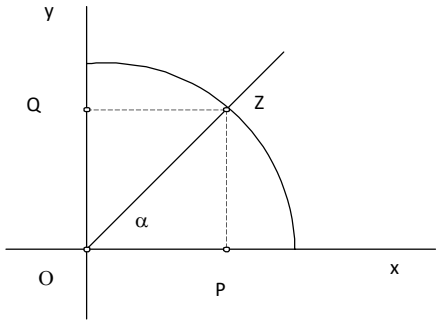
sine cosecant cosine secant tangent cotangent

6 pav.:
trigonometrinių
skaičių ženklo
kitimas pagal
kvadrantą

Pagrindinis ryšys tarp sinuso ir kosinuso yra Pitagorinis arba pamatinis trigonometrinis tapatumas:

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Tai gali būti laikoma Pitagoro teoremos versija ir išplaukia iš lygties x2 + y2 = 1 vienetiniam apskritimui (žr. 7 pav.):



pav. 7: trikampis OPZ

Specialios kampų poros

Kai kurių kampų sinusai, kosinusai ir liestinės, kotangentai yra lygūs kitų kampų sinusams, kosinusams ir tangentams, kotangentams.

a. Papildomi kampai (= suma yra ·)

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

b. Anti-papildomi kampai (= skirtumas yra π)

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

c. Priešingi kampai (= suma yra 2π)

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

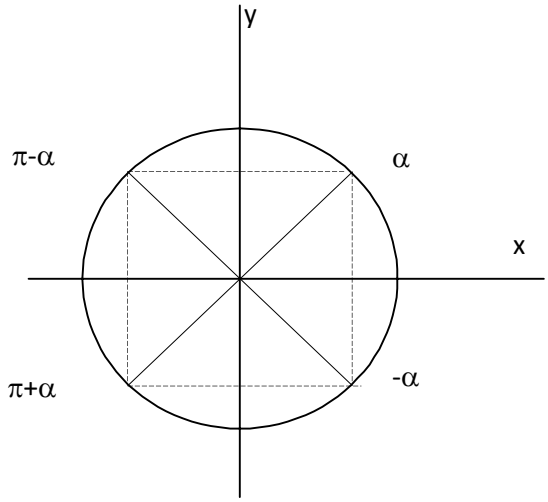
$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

d. Komplementariniai kampai (= sum is $\pi / 2$)

$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$

$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$ $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$

pav. 8 : Specialios kampų poros



Atskaitos kampai

Atskaitos kampų naudojimas yra būdas supaprastinti trigonometrinių skaičių įvairiais kampais skaičiavimą.

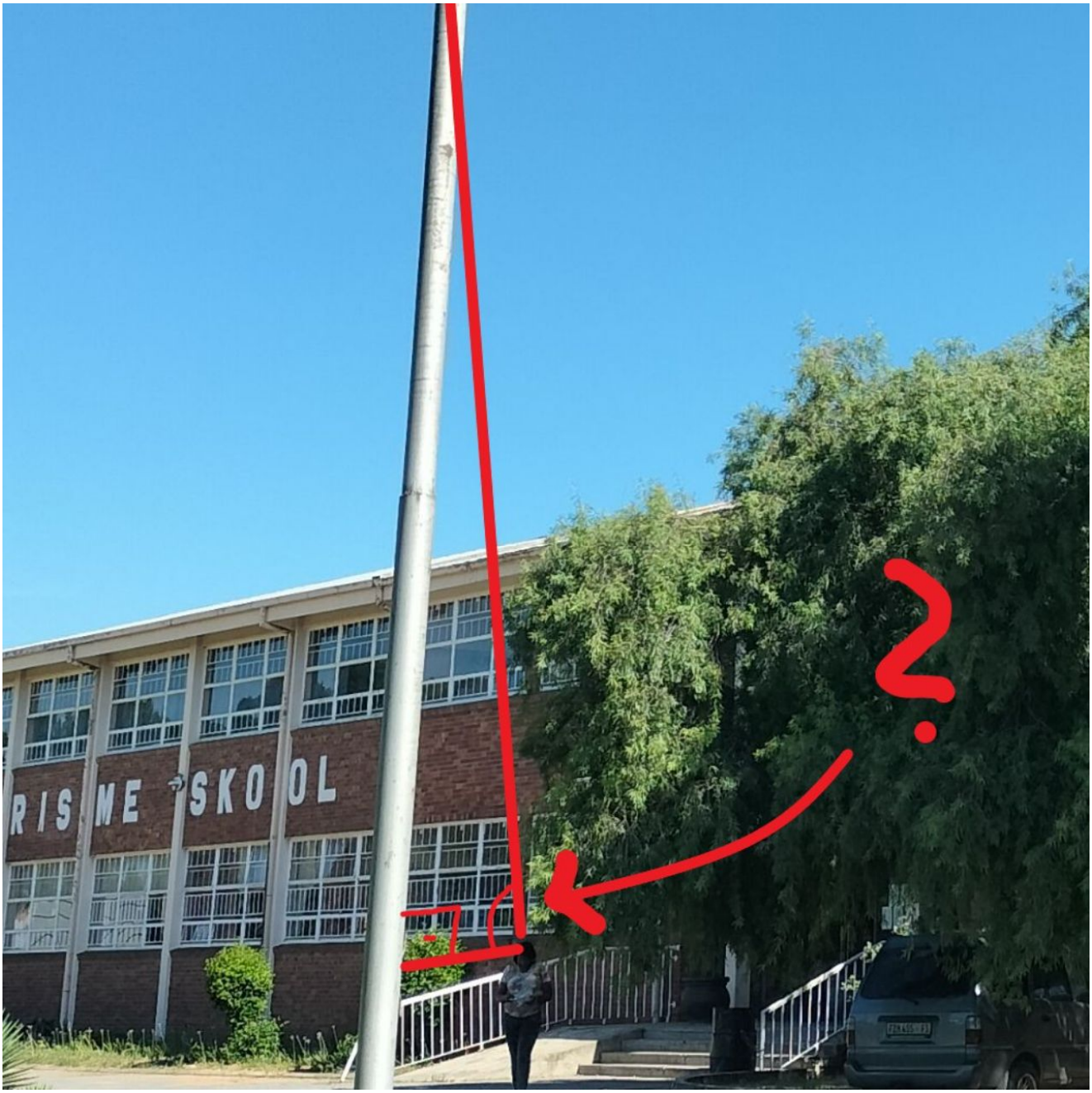
Susietas su kiekvienu kampu, nubrėžtu standartinėje padėtyje (tai reiškia, kad jo viršūnė yra pradžioje, o pradinė pusė yra teigiamoje x ašyje) (išskyrus kampus, kurių galinė pusė yra „ant“ ašių, vadinamų keturkampiais kampais) yra kampas, vadinamas atskaitos kampu. Atskaitos kampas yra smailusis kampas, sudarytas iš nurodyto kampo galinės pusės ir x ašies. I kvadranto kampai yra jų atskaitos kampai. Kitų kvadrantų kampų atskaitos kampai apskaičiuojami taip:

Kvadrantas	β (atskaitos kampas)
I	$\beta = \alpha$
II	$\beta = \pi - \alpha$
III	$\beta = \alpha - \pi$
IV	$\beta = -\alpha$

Atskaitos kampas ir nurodytas kampas sudaro kampų porą, kurioms galite pritaikyti ankstesnėje pastraipoje nurodytas savybes. Dėl šių savybių trigonometrinio skaičiaus reikšmė tam tikru kampu visada yra tokia pati kaip to kampo atskaitos kampo vertė, išskyrus atvejus, kai skiriasi ženklas.

Mokyklos vėliavos kotas: ***https://mathcitymap.eu/en/portal-en/#!/trail/258912/task/3836425***

Apskaičiuokite mokyklos vėliavos koto pakilimo kampą nuo stebėtojo, stovinčio 680 cm atstumu nuo vėliavos stiebo. (Atimkite stebėtojo ūgį iš vėliavos stiebo aukščio). Atsakymą pateikite iki kablelio.


RIS ME SKO OL
2

Mokyklos tribūna/arena: https://mathcitymap.eu/en/portal-en/#!/trail/258912/task/4936412

Apskaičiuokite tribūnos nuolydį laipsniais (Atsakymą pateikite vienu tikslumu po kablelio)

3. Trigonometrinės funkcijos

Periodinės funkcijos

Apibrėžtis: Funkcija f : IR → IR vadinama periodinė ⇔

$\exists\, p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\colon \forall\, x \in \text{dom}\, f\colon x + p \in \text{dom}\, f \wedge f(x+p) = f(x)$

Jei p atitinka šį apibrėžimą, tai visi teigiami ir neigiami skaičiai, kurie yra sveikieji p kartotiniai, taip pat atitinka šį apibrėžimą. Todėl mažiausią teigiamą skaičių, atitinkantį šį apibrėžimą, vadiname

funkcijos periodu P. Grafiškai šis periodiškumas reiškia, kad f(x) grafiko forma kartojasi per kitus intervalus, kurių ilgis P.

Funkcija f vadinama lygine jei:

$\forall x \in \mathrm{dom}\, f\colon -x \in \mathrm{dom}\, f \wedge f(-x) = f(x)$

Vadinasi, du taškai su priešingomis x reikšmėmis turi turėti tą pačią y reikšmę. Taigi grafikas turi būti simetriškas y ašiai.

Funkcija f vadinama nelygine, jei:

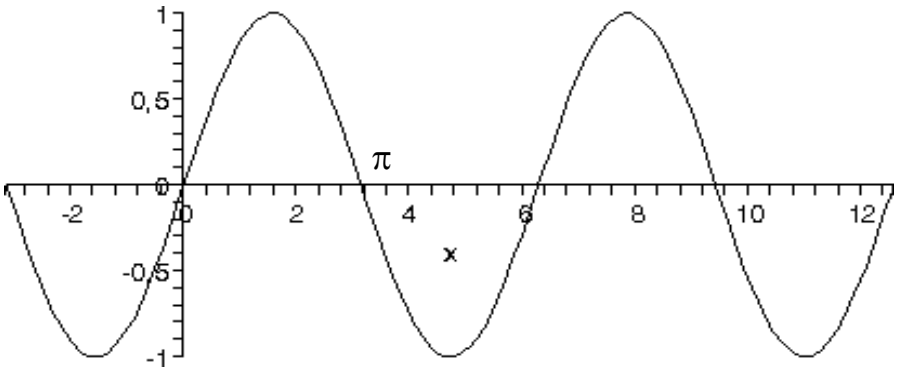
$\forall x \in \mathrm{dom}\, f\colon -x \in \mathrm{dom}\, f \wedge f(-x) = -f(x)$

Vadinasi, du taškai su priešingomis x reikšmėmis turi turėti priešingas y reikšmes. Taigi grafikas yra simetriškas kilmės atžvilgiu.

Sinuso funkcija

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \to \sin x$

Šios funkcijos periodas yra $2 \cdot \pi$. Ši funkcija yra nelyginė, nes priešingi kampai turi priešingus sinusus.

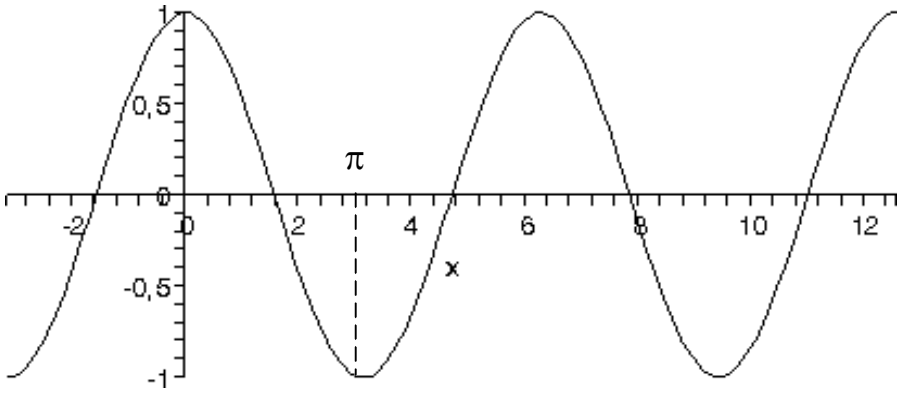


Kosinuso funkcija

$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \to \cos x$

Šios funkcijos periodas yra 2π. Ši funkcija yra lyginė, nes priešingi kampai turi tą patį kosinusą.

-π



pav. 10 : kosinusoidė

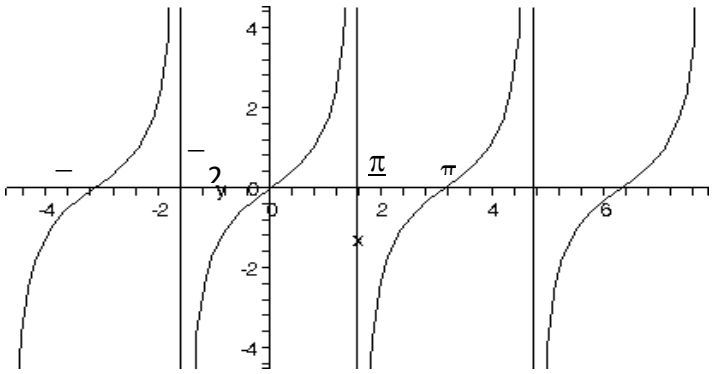
Sinuso vartai ir kosinusas: ***https://mathcitymap.eu/en/portal-en/#!/task/434554***

Į kapines patenkama pro lenktus vartus. Viršutinį galą galima aproksimuoti kosinuso funkcija f(x) = acos(bx). Pateikite a ir b sandaugą (x ir y ašis cm).

Tangento funkcija

$\tan : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \to \tan x$

Šios funkcijos periodas yra π. Ši funkcija yra nelyginė, nes priešingi kampai turi priešingas liestines.



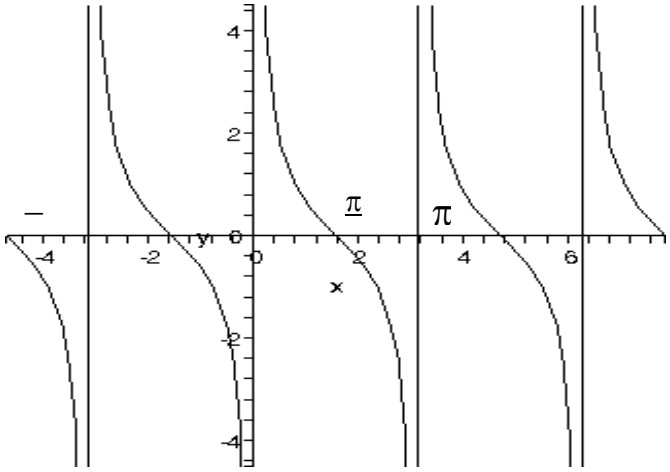
pav. 11 : tangento funkcija

Kotangento funkcija

$\cot : \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \to \cot x$

Šios funkcijos periodas yra π. Kotangento funkcija yra nustatyta statiniame trikampyje kaip statinio esančio šalia ir priešais santykis. Jos grafikas yra kotangentoidė. Funkcija yra nustatyta intervale nuo 0 + $k\pi$ iki π + $k\pi$ radianų ir jos reikšmės yra nuo -∞ iki ∞.

Detaliau galima rasti čia:https://www.calculat.org/lt/trigonometrines-funkcijos/kotangentas.html



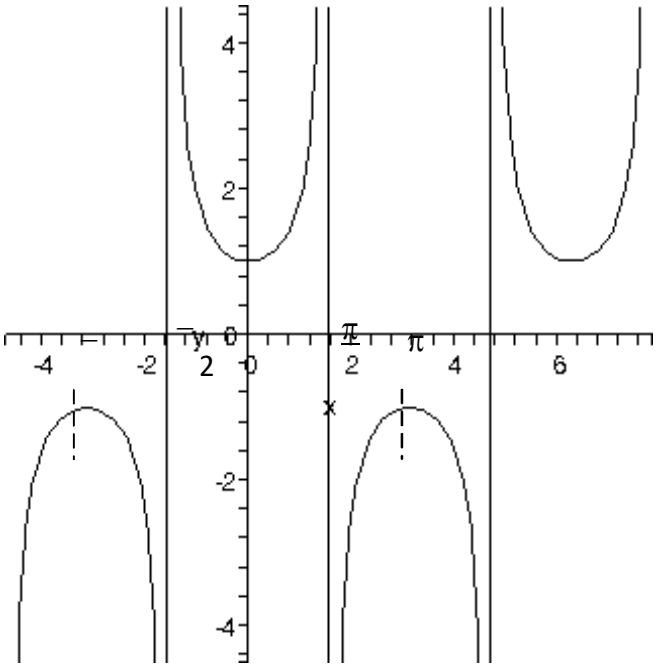
Pav. 12 : Kotangento funkcija

Visos trigonometrinės funkcijos gali būti išreiškiamos kaip stačiojo trikampio atitinkamų kraštinių santykiai.

Sinusas sin(α)sin (α): statinio prieš tą kampą ir įžambinės santykis. **Kosinusas** cos(α)cos (α): statinio šalia to kampo ir įžambinės santykis. **Tangentas** tg(α)tg(α): statinio prieš tą kampą ir statinio šalia to kampo santykis. **Kotangentas** ctg(α)ctg(α): statinio šalia to kampo ir statinio prieš tą kampą santykis.

Sekanto funkcija

$\sec : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), x \to \sec x$



pav. 13 : sekanto funkcija

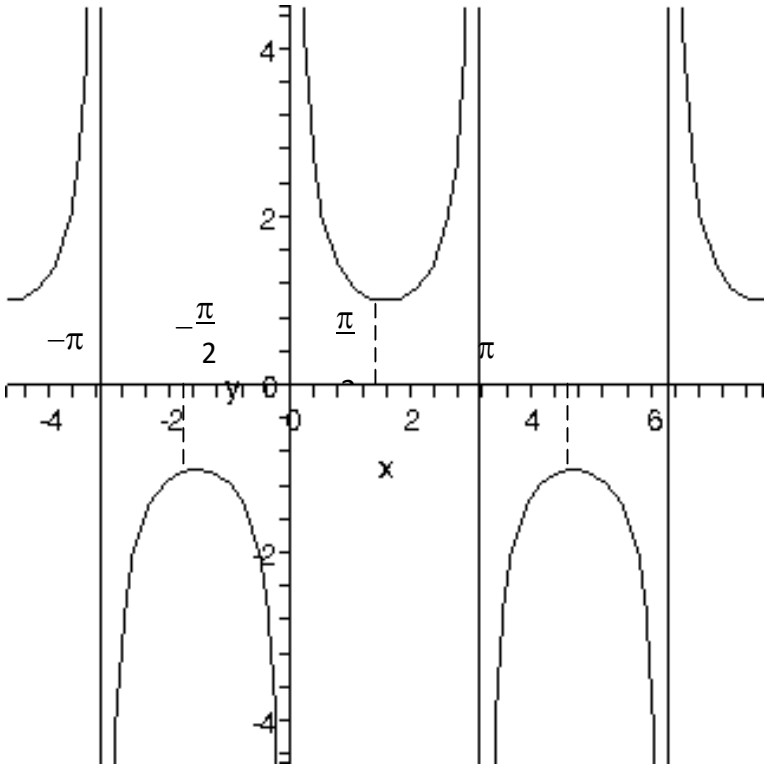
Taip pat egzistuoja ir rečiau naudojamos trigonometrinės funkcijos, tokios kaip **sekantas** sec(α)sec (α): įžambinės ir statinio šalia to kampo santykis, bei **kosekantas** csc(α)csc (α): įžambinės ir statinio prieš tą kampą santykis.

Kosekanto funkcija

$\csc : \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), x \to \csc x$

Funkcijos f (x) kosekanto išvestinė yra lygi jos išvestinei, jos funkcijos kosekantui ir f (x) kotangentui. Visa tai padauginta iš -1.

Panašiai funkcijos f (x) kosekanto darinys taip pat yra lygus f (x) kosinuso ir tarp tos pačios funkcijos kvadratinio sinuso dariniui.



pav. 14 : kosekanto funkcija

Daugiau informacijos čia: MapCityMath: https://mathcitymap.eu/en/

Šaltiniai:

https://www.youtube.com/watch?v=Qv2W0KM3W4c

https://mathbitsnotebook.com/Geometry/Trigonometry/TGElevDepress.html

https://www.youtube.com/watch?v=RxsdDkgJRAY

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:trig/x2ec2f6f830c9fb89:radians/v/radian-and-degree-conversion-practice

https://mathcitymap.eu/en/