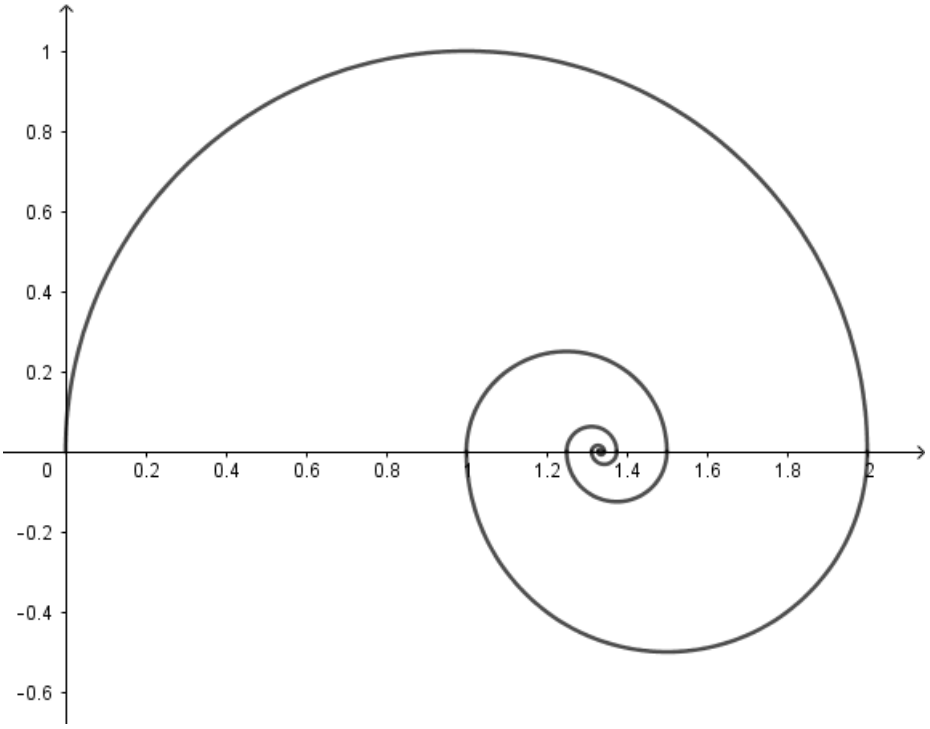
Cofinanziato dal
programma Erasmus+
dell'Unione europea

Corso ponte di matematica
Unità 3d – Limiti, Derivati, Integrali

Il supporto della Commissione Europea per la produzione di questa pubblicazione non costituisce un avallo del contenuto che riflette solo il punto di vista degli autori, e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per qualsiasi uso che può essere fatto delle informazioni ivi contenute.

1. Limiti

Task:



Consideriamo una spirale composta da semicerchi, che costruiamo come segue: il primo semicerchio ha raggio $r_1 = 1\ cm$*, il secondo semicerchio ha raggio* $r_2 = 0{,}5\ cm$*, il terzo semicerchio ha raggio* $r_3 = 0{,}25\ cm$*, ecc. Se potessimo disegnare questa spirale all'infinito, quanto sarebbe lunga?*

Nella matematica scolastica, gli studenti incontrano il termine "limite" in due varianti: il limite di una sequenza e il limite di una funzione. Alcuni studenti vengono all'università con la sensazione che ci siano due concetti di "limiti" completamente diversi. Inoltre, le definizioni di questi due termini rimangono poco chiare. In un tipico libro di testo di matematica, troviamo tradizionalmente:

Definizione (limite di una sequenza): se i membri di una sequenza (a_n)si avvicinano a un numero indefinitamente a(con valori $n$crescenti all'infinito), $a$chiamiamo il numero il *limite della sequenza* ; noi scriviamo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Definizione (limite di una funzione): Sia $f: A \to \mathbb{R}$una funzione reale di una variabile reale. Se, per valori $x$che portano a un certo numero x_0, i rispettivi valori di funzione si $f(x)$avvicinano indefinitamente a un numero a, allora il numero è $a$chiamato *limite della funzione* in un punto x_0; noi scriviamo

$$a = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Intuitivamente, queste definizioni sono abbastanza chiare: se i valori dell'argomento si avvicinano all'infinito o a un certo numero, anche i valori della funzione si avvicinano a un certo numero. Di

solito seguono molti compiti e inoltre agli studenti viene detto chiaramente che non tutte le sequenze o le funzioni devono avere un tale limite.

Tuttavia, come accennato in precedenza, i matematici cercano di "fornire informazioni precise con la minor ambiguità possibile", ma queste definizioni lasciano una domanda aperta agli studenti: cosa significa "avvicinarsi a un certo numero (o infinito)"? Le lezioni sul calcolo differenziale rispondono: "per qualsiasi $\varepsilon > 0$... " A questo punto, gli studenti potrebbero aver bisogno di più tempo per analizzare la situazione data.

"Avvicinarsi a qualcosa" ovviamente significa "avvicinarsi" - ma abbiamo solo riformulato il problema, non risolto. A volte, però, riformulare una frase aiuta a capirla meglio. Potremmo anche chiedere agli studenti di elaborare formulazioni equivalenti della frase "avvicinarsi a qualcosa". Una versione adatta è ad es. l'espressione "ridurre la distanza".

Questo ci dà una migliore possibilità di formalizzare le cose perché la distanza tra due numeri è qualcosa che può essere misurata e scritta usando il valore assoluto della differenza di quei numeri. Quindi, invece di dire "i membri $a_n$si stanno avvicinando a un numero a", ora possiamo dire "la distanza $|a_n - a|$si riduce". Pertanto, "avvicinarsi all'infinito" può essere descritto come la distanza che si riduce arbitrariamente.

Come può l'affermazione "se se$n$ si avvicina all'infinito, la distanza $|a_n - a|$diventa arbitrariamente piccola”? Agli studenti può essere offerto il seguente gioco: possono inserire qualsiasi numero piccolo (ma positivo) ε all'insegnante. Quindi l'insegnante risponde con un numero n_0, che ha la proprietà che " n_0c'è una distanza dall'indice$|a_n - a|$ inferiore al numero appena inserito". Queste considerazioni ci portano alla seguente definizione.

Definizione (limite di sequenza): Let(a_n) è una sequenza di numeri reali. Se per qualcuno$\varepsilon > 0$ esiste$n_0 \in \mathbb{N}$ in modo che per tutti, allora il numero aè $|a_n - a| < \varepsilon$chiamato $n \geq n_0$il limite della sequenza; scriviamo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Utilizzando lo stesso concetto di "approssimazione illimitata", possiamo anche riscrivere la definizione del limite di una funzione.

Definizione (limite di una funzione): Sia $f: A \to \mathbb{R}$una funzione reale di una variabile reale. Se per qualcuno $\varepsilon > 0$, esiste tale $\delta > 0$che per $x \in A, |x - x_0| < \delta$ si applica $|f(x) - a| < \varepsilon$, quindi $a$chiamiamo il numero il limite della funzione nel punto x_0; scriviamo

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$una funzione reale. Se per qualcuno $\varepsilon > 0$esiste un numero $x_0 \in \mathbb{R}$tale da valere $|f(x) - a| < \varepsilon$per tutti $x \geq x_0$, diciamo che il numero aè il limite della funzione nel punto ∞; segniamo simbolicamente

$$a = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Possiamo unire queste due definizioni (limiti di una sequenza o limiti di una funzione) in una, poiché possiamo considerare la sequenza come una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Compiti:

Compito 1: Calcola i limiti delle sequenze:

a) (a_n)*con* $a_n = \frac{1}{2^n}$ *b)* (a_n)*con* $a_n = \frac{1+n}{2n-5}$ *c)* (a_n)*con*$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Compito 1: Calcola i limiti delle funzioni:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x}$ *b)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$ *c)*$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Derivazione di una funzione

Inizieremo questo capitolo con un problema interessante che ci porterà al concetto di derivata di una funzione.

L'obiettivo:

Dopo essere saltato fuori dall'aereo, il paracadutista si muove in caduta libera (trascurare la resistenza dell'aria, che è molto piccola per i primi secondi) finché il suo paracadute non si apre. La distanza d che il paracadutista percorre nell'intervallo di tempo $[0, t]$*è approssimativa* $d(t) = 5t^2$*(il tempo t è misurato in secondi, la distanza è di due metri).*

1) *Qual è la velocità media del* $\bar{v}(1{,}3)$*paracadutista nell'intervallo di tempo* $[1{,}3]$*?*

2) *Trova la relazione per la velocità media $\bar{v}(t_0, t_1)$nell'intervallo di tempo $t_0, t_1]$!*
3) *Qual è la velocità istantanea del $v(3)$paracadutista dopo 3 secondi?*

Soluzione.

Per rispondere alla prima domanda basta inserire la formula per il calcolo della velocità:

$$\bar{v}(1{,}3) = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{5 \cdot 3^2 - 5 \cdot 1^2}{2} = 20\ (m/s).$$

Allo stesso modo, otteniamo la soluzione della seconda parte:

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{5 \cdot {t_1}^2 - 5 \cdot {t_0}^2}{t_1 - t_0} = \frac{5 \cdot ({t_1}^2 - {t_0}^2)}{t_1 - t_0}.$$

Naturalmente, possiamo usare questa relazione solo per il caso $t_1 \neq t_0$, cioè per un denominatore diverso da zero.

La frase precedente spiega che abbiamo un problema con la terza parte del compito. Non $v(t_0) = \bar{v}(t_0, t_0)$possiamo mettere $t_1 = t_0$. Cercheremo di risolvere questo dilemma usando il concetto di limite, diremo che $t_1$si avvicina al valore t_0. Noi scriviamo:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \bar{v}(t_0, t_1) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Continuiamo con questa idea,

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \bar{v}(t_0, t_1) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{5 \cdot ({t_1}^2 - {t_0}^2)}{t_1 - t_0} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{5 \cdot (t_1 - t_0) \cdot (t_1 + t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{t_1 \to t_0} 5 \cdot (t_1 + t_0).$$

Il calcolo del limite menzionato è facile, otteniamo

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} 5 \cdot (t_1 + t_0) = 5 \cdot (t_0 + t_0) = 5 \cdot (2 \cdot t_0) = 10 \cdot t_0\ ;$$

E nel nostro esempio particolare

$$v(3) = 10 \cdot 3 = 30\ (m/s).$$

Possiamo trovare molti compiti simili in cui sarà un cambiamento, ad es. volume (massa, forza...) a seconda del cambio di tempo (o altra quantità). Gli studenti dovrebbero notare il fattore comune in queste situazioni: è un cambiamento dei valori funzionali (incremento della funzione) a seconda del cambiamento della variabile (incremento dell'argomento).

Definizione (quoziente differenziale): Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$una funzione reale, $[a, b] \subseteq A$. Un numero reale

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

chiamiamo *la quota differenza* (o il tasso *medio di variazione*) funzioni f sull'intervallo $[a, b]$.

Definizione (derivazione di una funzione in un punto): Sia $f: A \to \mathbb{R}$a una funzione reale, $x_0 \in A$. Se c'è un limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

la chiamiamo derivata di una funzione $f$al punto x_0.

Aggiungeremo che mentre il rapporto differenziale caratterizza il *tasso medio di variazione della quantità,* la derivata parla del *tasso di variazione istantaneo della quantità.*

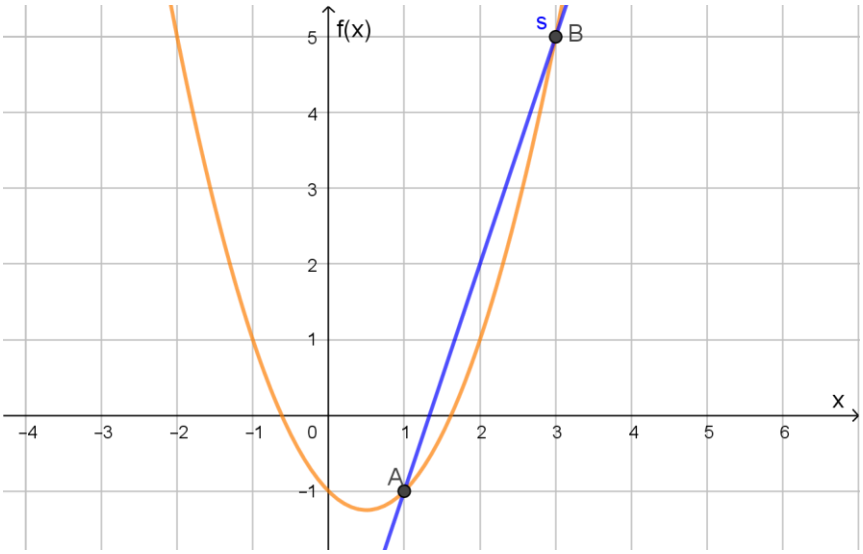
Un altro modo per introdurre i concetti menzionati è utilizzare grafici di funzioni.

Compito :

Lascia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, mentre* $f(x) = x^2 - x - 1$.

1) *Disegna il grafico della funzione* f*!*
2) *Costruisci la secante data dai punti* $A = (1, f(1))e\ B = (3, f(3))!$
3) *Determina la direttrice della secante, cioè pendenza media del grafico sull'intervallo* $[1, 3]!$
4) *Scrivi l'equazione della secante data da due punti arbitrari* $A = (x_0, f(x_0))$*,* $B = (x_1, f(x_1))!$
5) *Costruisci una tangente al grafico* f *nel punto* $x = 1$*, o sul punto* $A = (1, f(1))!$
6) *Determinare la direzione della tangente indicata, cioè. pendenza del grafico nel punto* $x = 1!$
7) *Trova la retta tangente in qualsiasi punto* $X = (x_0, f(x_0))!$

Possiamo gestire facilmente i primi due punti:



Nel terzo punto, la direzione della secante data dai punti Aa Bsi calcola come segue:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(3^2 - 3 - 1) - (1^2 - 1 - 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

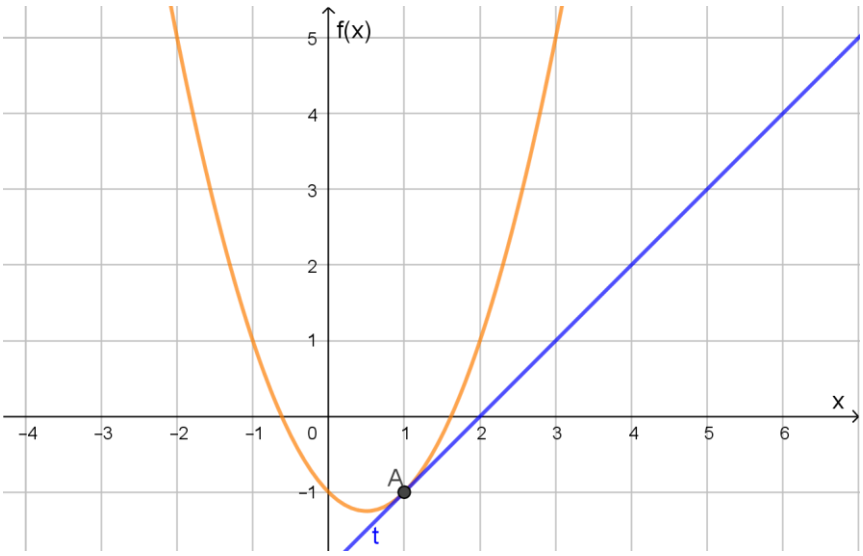
Nella parte successiva, è necessario pensare in termini generali. Siano quindi i punti $A = (x_0, f(x_0))$, $B = (x_1, f(x_1))$, quindi per la retta AB abbiamo

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{({x_1}^2-x_1-1)-({x_0}^2-x_0-1)}{x_1-x_0}=\frac{({x_1}^2-{x_0}^2)-(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=$$

$$=\frac{(x_1+x_0)\cdot(x_1-x_0)-(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=x_1+x_0-1.$$

Questa relazione ha senso solo per $x_1 \neq x_0$, in altre parole, punti Ae Bsono diversi l'uno dall'altro.

Il quinto punto richiede la costruzione di una tangente al punto A, possiamo farlo solo approssimativamente o con l'aiuto di qualche programma.



Osservare l'immagine ci offre l'ipotesi che la direzione della tangente assumerà il valore 1. Ma come mostrarlo con un calcolo corretto? E come rispondere all'ultima parte del compito, ovvero la generalizzazione del nostro problema? Potremmo provare ad utilizzare il calcolo della retta secante e identificare una coppia di punti $A=B$, ma abbiamo vietato proprio questa procedura!

Cercheremo di trovare la salvezza nel concetto di limiti. Affermeremo che il punto Bè infinitamente vicino al punto A, o la variabile $x_1$si avvicina al valore indefinitamente x_0. Quindi per la retta tangente otteniamo (problema 7):

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\lim_{x_1\to x_0}(x_1+x_0-1).$$

Da li

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}(x_1+x_0-1)=x_0+x_0-1=2\cdot x_0-1,$$

e soprattutto per il punto $x=1$(problema 6) che abbiamo

$$f'(1)=2\cdot 1-1=1.$$

Osservando la relazione per $f'(x_0)$, gli studenti possono nuovamente notare che è il tasso di variazione dei valori della funzione rispetto al cambiamento dell'argomento. Allo stesso tempo, il valore $f'(x_0)$indica il valore numerico della direzione della tangente nel punto x_0, o più precisamente – la direzione della tangente al grafico della funzione $f$nel punto $X=(x_0,f(x_0))$.

È importante che gli studenti conoscano entrambi i modi per scoprire il derivato ed essere in grado di spiegarlo ai loro studenti.

L'obiettivo:

Ci sono 200 l di acqua nella canna della pioggia, è possibile pompare l'acqua dalla canna dalla valvola sul fondo. Se la valvola è completamente aperta, il volume V(t) di acqua (in litri) rimanente nella canna dopo t secondi è dato da $V(t) = (20 - t)^2$.

a) Dopo quanti secondi il barile sarà vuoto?
b) Qual è il tasso medio di variazione del volume d'acqua nell'intervallo [0, 1] e nell'intervallo [19, 20]? Pensi che i due valori siano diversi?
c) Qual è la velocità di variazione del volume d'acqua al $t = 3$*secondo?*

Finora abbiamo calcolato e utilizzato $f'(x_0)$come valore numerico ad un certo punto x_0. Se possiamo calcolare questo valore in ogni punto $x$del dominio della funzione f, possiamo definire la derivata come una funzione.

Definizione (derivazione di una funzione): Sia $f: A \to \mathbb{R}$una funzione reale. Se il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esiste per ogni $x_0 \in A$, quindi $f$chiamiamo la funzione *derivabile su* A. Allo stesso tempo $f': A \to \mathbb{R}$, la funzione definita dal regolamento

$$f': x \to f'(x)$$

chiamiamo *derivata della funzione* f (a volte solo un *derivato*).

3.1 Derivate di funzioni elementari

Utilizzando la definizione di cui sopra, è possibile dimostrare molte regole per il calcolo delle derivate. Tuttavia, presenteremo solo i risultati qui:

Teorema (regole per la differenziazione): Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$e $h: A \to \mathbb{R}$sono vere e proprie funzioni differenziabili ; lascia $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < a \neq 1$. Quindi si applica:

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Le funzioni $c \cdot g$e $g + h$sono anche differenziabili, allo stesso tempo vale
    - $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

- $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

I derivati hanno molte applicazioni in molte situazioni del mondo reale, nella scienza, nell'economia, ecc. Immaginiamo diversi compiti che possono essere adatti a diversi tipi di scuole.

3.2 Applicazioni ed uso delle derivate in economia

Prima della dimostrazione dell'applicazione del calcolo differenziale in economia, dobbiamo introdurre (o ripetere per gli studenti delle scuole di economia) le seguenti definizioni e concetti.

Definizione: Sia $f_c: A \to \mathbb{R}$una funzione reale. Questa funzione è chiamata funzione di costo del processo produttivo se $x$assegna i costi totali all'output di produzione dei prodotti $f_c(x)$(il valore $x$indica il numero di unità prodotte, ad esempio biciclette, racchette da tennis, ecc.).

Sia $f_c: A \to \mathbb{R}$la funzione di costo. Poi la funzione$f_c': A \to \mathbb{R}$ chiamiamo funzione di costo limite. (Indica approssimativamente l'aumento del costo all'aumentare del numero di unità prodotte.)

Sia $f_c: A \to \mathbb{R}$la funzione di costo. Poi la funzione $\overline{f_c}: A \to \mathbb{R}$definita dal regolamento

$$\overline{f_c}(x) = \frac{f_c(x)}{x}, \quad x \sim 0$$

chiamiamo la funzione di costo per pezzo. (Indica il costo per unità prodotta.)

Sia $f_c: A \to \mathbb{R}$la funzione di costo e $\overline{f_c}: A \to \mathbb{R}$la corrispondente funzione di costo per pezzo. Quindi il valore di x_{opt}, per il quale il valore minimo di $f_c(x_{\text{opt}})$, è chiamato quantità ottimale di produzione.

Teorema: Sia $f_c: A \to \mathbb{R}$una funzione di costo differenziabile, $A \subset \mathbb{R}_0^+$sia un intervallo. Se x_{opt}si trova all'interno dell'intervallo A, allora è valido $\overline{f_c}(x_{\text{opt}}) = f_c'(x_{\text{opt}})$.

Un parametro importante per una quantità di produzione ottimale è il prezzo per pezzo. Indica il limite di prezzo inferiore per il pezzo prodotto, ovvero a lungo termine, ogni pezzo prodotto deve essere venduto almeno a questo prezzo per rendere sostenibile il processo produttivo.

Compiti:

Compito 1: L'azienda produce azoto liquido. I costi di produzione per tonnellata di azoto sono espressi approssimativamente dalla funzione di costo$f_c(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100$ *(la variabile* x*è espressa in tonnellate, il valore* $f_c(x)$*è calcolato in euro). Per motivi di capacità, non è possibile produrre più di 10 t al giorno.*

a) *Disegna il grafico della funzione di costo e della funzione di costo marginale!*
b) *A quale produzione giornaliera corrisponde la funzione di costo unitario minimo?*

Compito 2: Lascia che la funzione di costo di un determinato prodotto sia $K(x) = 3x^2 + 50x + 2700$*. Dimostrare che la quantità ottimale di produzione è* $x_{opt} = 30$*e calcola il prezzo iniziale a lungo termine!*

3.3 Applicazioni ed uso delle derivate nella scienza

Ci sono molte applicazioni del calcolo differenziale in vari campi scientifici. Daremo due esempi: la legge di Snell in fisica (ottica) e la modellazione della ramificazione dei vasi sanguigni nel corpo umano (biologia).

Legge di Snell : Quando un raggio di luce passa da un mezzo all'altro, viene rifratto. Se indichiamo $v_1$la densità della luce nel primo mezzo con il simbolo la $v_2$velocità della luce nel secondo mezzo, e allo stesso tempo il raggio in arrivo colpisce l'interfaccia tra i due mezzi dati ad angoloα (misurato dalla perpendicolare) e continua ad angolo β, quindi si applica

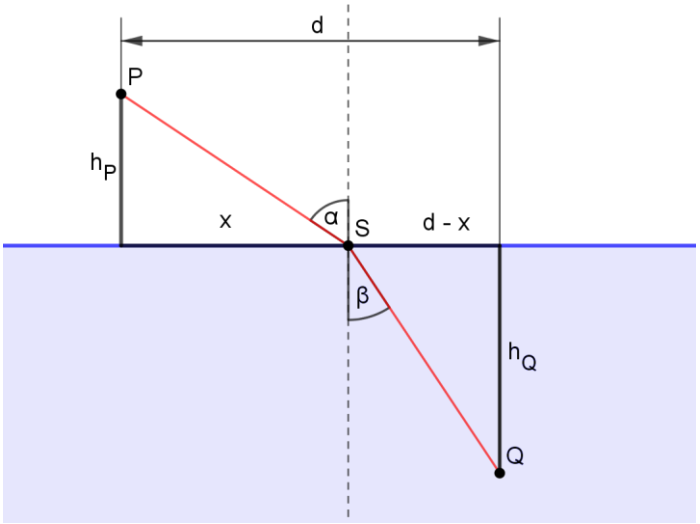
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Prova:

Questa dimostrazione è un tipico esempio di dimostrazione in matematica applicata. Unisce le conoscenze sia della disciplina scientifica prescelta (in questo caso della fisica) sia della matematica.

Il punto di partenza non matematico di questa dimostrazione è il *principio di Fermat* : quando la luce viaggia dal punto P al punto Q, il raggio di luce "usa" sempre il percorso che richiede il tempo più breve.

Per illustrare la situazione, iniziamo con un'immagine:



Il raggio di luce si sposta dal punto P attraverso il punto S al punto Q. tCalcoliamo il tempo necessario per questo come il rapporto tra le distanze e le velocità nei singoli ambienti:

$$t(x) = \frac{|SP|}{v_1} + \frac{|SQ|}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + h_P^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}}{v_2} = \frac{1}{v_1}\cdot\sqrt{x^2 + h_P^2} + \frac{1}{v_2}\cdot\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}.$$

Dobbiamo ridurre al minimo il tempo, quindi calcoliamo la derivata

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + h_P^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{-2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_P^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}}.$$

Successivamente, mettiamo $t'(x) = 0$, quindi

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_P^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_P^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}}.$$

In base all'immagine, lo vediamo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_P^2}} = \sin\alpha \quad \text{a súčasne} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + h_Q^2}} = \sin\beta.$$

Stiamo già ricevendo da lì

$$\frac{1}{v_1} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{v_2} \cdot \sin\beta \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

Per completare la dimostrazione, è necessario mostrare che il nostro extremum è davvero un minimo - questo è possibile utilizzando il segno della derivata seconda (lasciamo questa parte agli studenti).

□

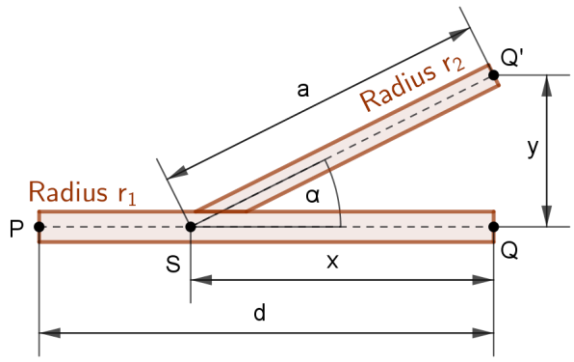
Sceglieremo un altro esempio in biologia: modellare la ramificazione dei vasi sanguigni. Il punto di partenza di questo concetto è l'idea che il movimento del sangue nel corpo è governato dal "principio di minor resistenza". Ciò significa che se un vaso si dirama da un altro, lo fa in modo da creare la minima resistenza al flusso sanguigno nel corpo (in realtà, ovviamente, ci sono alcune eccezioni, poiché una ramificazione ottimale potrebbe non essere possibile a causa di limitazioni fisiche).

La resistenza al flusso $R_F$in un vaso di lunghezza de raggio rè data dalla relazione

$$R_F = c \cdot \frac{d}{r^4},$$

mentre cc'è un certo fattore che caratterizza la viscosità del sangue.

Mostriamo la nostra situazione in una foto:



Il nostro compito sarà determinare la posizione ottimale del punto S. In altre parole, vogliamo trovare la distanza $x$alla quale la resistenza totale del flusso sanguigno dal punto P attraverso il punto S al punto Q' sarà minima. Iniziamo calcolando la resistenza di flusso, che consiste nella resistenza sul percorso PS e poi SQ', otteniamo

$$R_F(x) = c \cdot \frac{(d-x)}{r_1^4} + c \cdot \frac{a}{r_2^4} = c \cdot \frac{(d-x)}{r_1^4} + c \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_2^4}.$$

Stiamo cercando estremi locali, quindi calcoliamo la derivata della funzione data,

$$R_F'(x) = c \cdot \frac{-1}{r_1^4} + c \cdot \frac{2x}{2r_2^4\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Diamoci da fare $R_F{}'(x) = 0$, poi

$$c \cdot \frac{-1}{r_1^4} + c \cdot \frac{2x}{2r_2^4\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_1^4} = \frac{x}{r_2^4\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{r_2^4}{r_1^4} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Poiché tutti i termini sono positivi, otteniamo

$$\frac{r_2^4}{r_1^4} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{r_2^8}{r_1^8} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{r_1^8}{r_2^8} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^8}{r_2^8} - 1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{r_1^8}{r_2^8} - 1} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{\frac{r_1^8}{r_2^8} - 1}} = x \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^8 - 1}}.$$

L'ultima relazione ci fornisce informazioni importanti. Innanzitutto, la posizione ottimale dipende dal valore y(la distanza tra i punti finali dei vasi sanguigni) e dal valore del rapporto dei raggi, cioè. $\frac{r_1}{r_2}$. In secondo luogo, l'equazione ha senso solo se questo rapporto è maggiore di 1, $r_1 > r_2$cioè.

Nel caso in cui abbiamo una distanza costante y(ad esempio data da vincoli fisici), possiamo cercare l'angolo di ramificazione ottimaleα nei vasi sanguigni. Usando la nostra immagine possiamo scrivere

$$a = \frac{y}{\sin\alpha}, \text{ a tiež } x = \frac{y}{\tan\alpha}.$$

formula precedente per $R_F$ora usando la variabile α, quindi

$$R_F(\alpha) = c \cdot \frac{(d-x)}{r_1^4} + c \cdot \frac{a}{r_2^4} = c \cdot \frac{d - \frac{y}{\tan\alpha}}{r_1^4} + c \cdot \frac{y}{r_2^4 \cdot \sin\alpha} = \frac{c}{r_1^4} \cdot \left(d - \frac{y}{\tan\alpha}\right) + \frac{c \cdot y}{r_2^4} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Differenziando rispetto alla variabile α, otteniamo

$$R_F'^{(\alpha)} = \frac{c}{r_1^4} \cdot \left(\frac{-y \cdot ((\tan\alpha)^2 + 1)}{(\tan\alpha)^2}\right) + \frac{c \cdot y}{r_2^4} \cdot \frac{-\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2}.$$

Impostiamo la derivata uguale a zero e modifichiamo:

$$\frac{c}{r_1^4}\cdot\left(\frac{-y\cdot((\tan\alpha)^2+1)}{(\tan\alpha)^2}\right)+\frac{c\cdot y}{r_2^4}\cdot\frac{-\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r_1^4}\cdot\left(\frac{(\tan\alpha)^2+1}{(\tan\alpha)^2}\right)=\frac{1}{r_2^4}\cdot\frac{\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r_1^4}\cdot\frac{(\tan\alpha)^2+1}{(\tan\alpha)^2}=\frac{1}{r_2^4}\cdot\frac{1}{(\cos\alpha)\cdot(\tan\alpha)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r_1^4}\cdot((\tan\alpha)^2+1)=\frac{1}{r_2^4}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r_1^4}\cdot((\tan\alpha)^2+1)=\frac{1}{r_2^4}\cdot\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}.$$

Per semplificare la notazione, indichiamo $(\tan\alpha)^2=b$, ora abbiamo

$$\frac{1}{r_1^4}\cdot(b+1)=\frac{1}{r_2^4}\cdot\sqrt{b+1}.$$

Poiché $(\tan\alpha)^2=b>0$, possiamo esponenziale l'equazione data:

$$\frac{1}{r_1^8}\cdot(b+1)^2=\frac{1}{r_2^8}\cdot(b+1)\ \Rightarrow\ \frac{1}{r_1^8}\cdot(b^2+2b+1)=\frac{1}{r_2^8}\cdot(b+1).$$

Risolviamo questa equazione quadratica usando la ben nota formula, otteniamo due soluzioni

$$b=\frac{r_1^8}{r_2^8}-1,\ \text{ resp. }\ b=-1.$$

Tuttavia, $b$deve essere positivo, quindi la seconda soluzione non soddisfa le condizioni date. Con l'aiuto della prima altezza corretta, otteniamo

$$(\tan\alpha)^2=\frac{r_1^8}{r_2^8}-1=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^8-1.$$

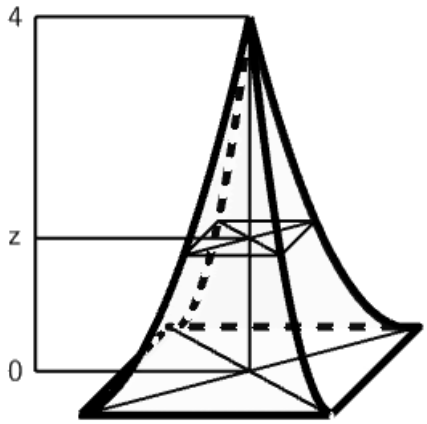
L'angolo ottimale αdipende quindi solo dal rapporto dei raggi. Ad esempio, calcoliamo l'angolo di ramificazione ottimale dei vasi nel caso in cui il vaso principale abbia il doppio del raggio del vaso secondario, ad es.$\frac{r_1}{r_2}=2$:

$$(\tan\alpha)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^8-1=2^8-1=255\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\sqrt{255}\approx 15.97\ \Rightarrow\ \alpha\approx 86.42°.$$

Infine, gli studenti possono analizzare un caso in cui$\frac{r_1}{r_2}\to\alpha$.

3. Integrali

L'obiettivo:



Il corpo nella foto ha un'altezza di 4. La sua sezione trasversale a ciascuna altezza zè un quadrato con un lato di lunghezza $a(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \sqrt{z}\right)$. Calcola il volume del corpo!

Nella matematica scolastica, ci sono due modi per gli integrali: usando antiderivate (funzioni primitive) o calcolando il contenuto sotto il grafico di qualche funzione. Nelle università, l'integrale di Riemann è solitamente definito, inizieremo con le antiderivate.

Compito: per la velocità di un determinato movimento, $v(t) = 2t$. Trova l'equazione del percorso $s = s(t)$se $s(0) = 0$.

Soluzione: lo sappiamo già $v(t) = s'(t)$. Quindi dobbiamo cercare una funzione $s = s(t)$per la quale $s'(t) = v(t)$e vale allo stesso tempo $s(0) = 0$. Da lì non abbiamo istruzioni su come procedere in questa situazione. Tuttavia, osservando le regole per la derivazione delle funzioni elementari, possiamo stimare che la funzione $s(t) = t^2$avrà le proprietà desiderate.

Nella risoluzione di problemi applicativi, ci sono molti altri casi in cui conosciamo la derivata e dobbiamo trovare la funzione originale.

Definizione (antiderivata): Sia $f: A \to \mathbb{R}$una funzione reale. Se esiste una tale funzione $F: A \to \mathbb{R}$che $x \in A$vale per tutti $F'(x) = f(x)$, allora la funzione è Fchiamata l' *antiderivata* della funzione fo *funzione primitiva* per funzionare f.

Nel prossimo esempio, mostreremo immediatamente che esistono diverse funzioni primitive per la funzione data.

Compito: dimostrare che le funzioni $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 2$, $F_3(x) = x^2 - 1$sono antiderivate della funzione $f(x) = 2x$.

Soluzione: derivare le funzioni date.

Sembra che tutte le funzioni primitive siano date da una certa formula.

Teorema: Sia $f: I \to \mathbb{R}$una funzione reale, $I \subset \mathbb{R}$. Se $F: I \to \mathbb{R}$è un'antiderivativa della funzione f, allora tutte le antiderivate sono date dalla formula $G(x) = F(x) + c$dove $c \in \mathbb{R}$.

L'affermazione può essere dimostrata utilizzando il fatto che se$f'(x) = 0$ per tutti $x \in I$, così fè una funzione costante.

Vediamo che se troviamo una funzione primitiva, possiamo trovarne infiniti.

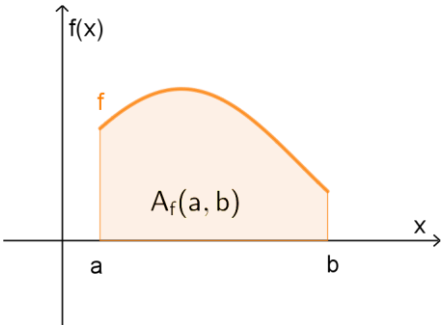
Poiché conosciamo già le regole per la derivazione delle funzioni, troviamo le regole per l'integrazione.

Teorema (regole per l'integrazione): Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $h: A \to \mathbb{R}$funzioni reali per le quali esistono antiderivate ; $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Allora si applica

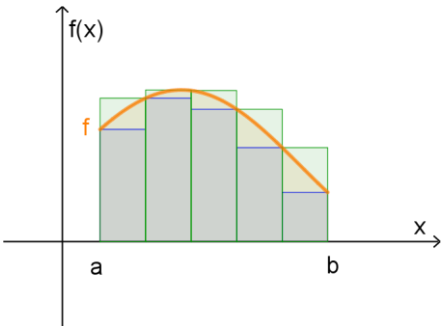
- $f(x) = c \Rightarrow F(x) = c \cdot x$
- $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$
- $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \Rightarrow F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x$
- Per funzioni $c \cdot g$o $g + h$, esistono anche antiderivati e riserve
    - $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow F(x) = c \cdot G(x)$
    - $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + H(x)$.

Nel caso della derivata, abbiamo spiegato il suo significato geometrico: è la linea tangente. Nel prossimo testo ci concentreremo sul significato geometrico dell'antiderivata. Saremo interessati a calcolare il contenuto dell'area delimitata dal grafico di qualche funzione.

Definizione: Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$una $x \in [a, b]$funzione reale, sia $f(x) > 0$. La parte del piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$, dall'asse o_xe dalle rette $x = a$, $x = b$è chiamata *trapezio curvilineo.*



il contenuto del trapezio curvilineo nella nostra immagine con un simbolo. $A_f(a, b)$Non sappiamo ancora come calcolare questo contenuto. Per l'inizio, quindi, ci accontenteremo della sua approssimazione. A questo scopo, dividiamo l'intervallo $[a, b]$in sottointervalli, sui quali costruiamo rettangoli inscritti e circoscritti per la forma data.



La somma del contenuto di tutti i rettangoli descritti (blu) è chiamata *somma integrale inferiore,* segniamola con il simbolo L(a volte è chiamata somma di Riemann inferiore, o più precisamente somma di Darboux inferiore). La somma del contenuto di tutti i rettangoli (verdi) descritti è chiamata *somma integrale superiore,* denotata dal simbolo U. Indipendentemente dal numero di sottointervalli selezionato, sarà valido

$L < A_f(a,b) < U.$

Se scegliamo una divisione più fine (cioè se dividiamo l'intervallo originale $[a,b]$in più sottointervalli), l'approssimazione del valore $A_f(a,b)$probabilmente migliorerà. Proviamo a formalizzare tutti i passaggi citati volti al calcolo del contenuto sconosciuto. Iniziamo dividendo l'intervallo.

Definizione : Let $[a,b] \subset \mathbb{R}$. L'ultima sequenza di punti $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, mentre $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, è chiamata *divisione dell'intervallo* $[a,b]$.

Definizione: Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$una funzione continua, $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$viene scelta divisione degli intervalli $[a,b]$. Sia $d_i$la lunghezza i - peso sottointervallo, cioè _ $d_i = x_i - x_{i-1}$per, $i = 1, 2, \dots, n$. Sia min_iil minimo (più precisamente, il minimo) della $f$funzione nell'i $min_i = \inf\{f(x) | x \in (x_{i-1}, x_i)\}$- esimo sottointervallo, cioè, dove, $i = 1, 2, \dots, n$; similmente max_i, il massimo (più precisamente, il $max_i = \sup\{f(x) | x \in (x_{i-1}, x_i)\}$supremo) della funzione fè nell'i - *esimo* sottointervallo, cioè, dove $i = 1, 2, \dots, n$. Quindi il più basso o la somma integrale superiore appartenente alla funzione fe la divisione Pdata sono date dalle relazioni:

$$L_f(P) = min_1 \cdot d_1 + min_2 \cdot d_2 + \cdots + min_{n-1} \cdot d_{n-1} + min_n \cdot d_n = \sum_{i=1}^{n} min_i \cdot d_i,$$

$$U_f(P) = max_1 \cdot d_1 + max_2 \cdot d_2 + \cdots + max_{n-1} \cdot d_{n-1} + max_n \cdot d_n = \sum_{i=1}^{n} max_i \cdot d_i.$$

Frase: Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$una funzione continua. Allora esiste esattamente un numero reale Itale che le disuguaglianze $L_f(P) \le I \le U_f(P)$valgano per tutte le possibili divisioni Pdell'intervallo $[a,b]$.

Definizione: Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$una funzione continua. Il numero Idato univocamente dalle disuguaglianze $L_f(P) \le I \le U_f(P)$valide per ogni divisione Pdell'intervallo è $[a,b]$detto *integrale definito* della funzione $f$nei limiti da aa b, scriviamo

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Combinando i fatti di cui sopra, troviamo che per il calcolo del contenuto del nostro trapezio curvilineo vale

$$A_f(a,b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il seguente teorema, chiamato *teorema di base del calcolo integrale* o *formula di Newton-Leibniz,* riguarda il calcolo dell'area sotto la curva e l' antiderivativa.

Teorema (formula di Newton - Leibniz):

(1) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$la funzione continua, $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$sia definita da un regolamento

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora la funzione Fè differenziabile e contemporaneamente $x \in (a,b)$valida per tutti

$$F'(x) = f(x).$$

(2) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$una funzione continua, $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$sia la sua antiderivata. Allora si applica

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Indichiamo l'idea della dimostrazione della seconda parte dell'affermazione:

è approssimativamente $F'(x_i) \approx \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{d_i}$, odkial' $F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F'(x_i)\cdot d_i$;valido sull'i -*esimo* sottointervallo

aggiustare la differenza $F(b) - F(a)$, otteniamo

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$

$$= \big(F(x_n) - F(x_{n-1})\big) + \big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\big) + \cdots + \big(F(x_1) - F(x_0)\big) \approx$$

$$\approx F'(x_n)\cdot d_n + F'(x_{n-1})\cdot d_{n-1} + \cdots + F'(x_1)\cdot d_1.$$

Usando il fatto che la funzione Fè un'antiderivata f, abbiamo

$$F(b) - F(a) \approx f(x_n)\cdot d_n + f(x_{n-1})\cdot d_{n-1} + \cdots + f(x_1)\cdot d_1.$$

Dopo un ulteriore e ulteriore affinamento della divisione, si arriva alla definizione di un integrale definito, cioè

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

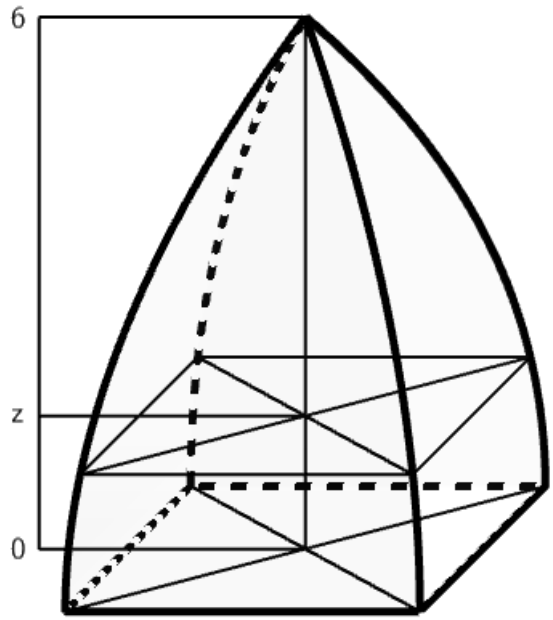
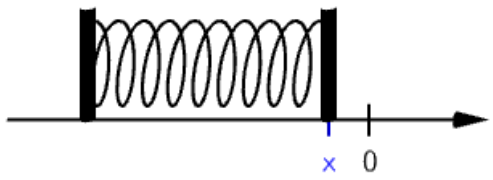
Pertanto, il teorema affermato ci fornisce un comodo calcolo di alcuni integrali usando l' antiderivativa.

Task:

Task 1: L'accelerazione di una certa macchina in un intervallo di tempo $[0, 40]$*è data dalla funzione* $a(t) = 3.2 - 0.16t + 0{,}002t^2$*, il tempo è dato in secondi, l'accelerazione vm/* s^2*.*

a) *Qual è la velocità dell'auto dopo tsecondi?*
b) *Qual è la velocità dell'auto dopo* 40*secondi?*
c) *Quanto percorre l'auto in tpochi secondi?*
d)

Task 2: il solido nell'immagine ha un'altezza di 6. La sua sezione trasversale a ciascuna altezza zè un quadrato con un lato di lunghezza $a(z) = 2 - \frac{1}{18}z^2$*. Calcola il volume del corpo!*



Task 3: Se la molla nella figura è compressa nella posizione $x < 0$*, la forza elastica* F*agisce per allungare la molla alla sua lunghezza originale. Per questa forza,* $F = kx$*, mentre* k*è la caratteristica della molla. Prendiamo una molla di materiale per la quale* $k = 300\ N/m$*, comprimiamo* $5\ cm$*. Che lavoro bisogna fare entro questa primavera per tornare alla sua lunghezza originaria?*